



Kandidaatintutkielma
Teoreettinen fysiikka

Kerrin ratkaisun horisontti- ja singulariteettirakenne

Sami Raatikainen
2015

Ohjaaja: Syksy Räsänen
Tarkastaja: Syksy Räsänen

HELSINGIN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

PL 64 (Gustaf Hällströmin katu 2a)
00014 Helsingin yliopisto

Tiivistelmä

Kerrin ratkaisu on aksiaalisymmetrinen tyhjiöratkaisu Einsteinin yhtälöille. Se on yleisin mahdollinen akselinsa ympäri pyörivää mustaa aukkoa kuvaava ratkaisu. Tässä tutkielmassa esitellään ratkaisun rakenne sekä yleisimmät ratkaisussa käytetyt koordinaatit. Osoitetaan, että pyörivän mustan aukon singulariteetti on rengas, jota ympäröi kaksi ellipsoidin muotoista tapahtumahorisonttia. Lisäksi osoitetaan, että pyörivä musta aukko aiheuttaa pyörteen aika-avaruudessa ja että ratkaisulla on kaksi stationaarisen rajan pintaa, joiden välisessä alueessa hiukkasten on pyörittävä mustan aukon mukana.

Sisältö

1 Johdanto	1
2 Kerrin ratkaisu	1
2.1 Ratkaisun yksikäsitteisyydestä	1
2.2 Boyer–Lindquist-koordinaatit	2
2.3 Metriikan ominaisuuksia	3
3 Singulariteetti	4
3.1 Aika-avaruuden singulariteetti	4
3.2 Kerr–Schild-koordinaatit	4
3.3 Singulariteetin rakenne	5
4 Horisontit	6
4.1 Koordinaattisingulariteetti	6
4.2 Tapahtumahorisontit	7
4.2.1 Tapaus $a^2 < M^2$	8
4.2.2 Tapaus $a^2 = M^2$	9
4.2.3 Tapaus $a^2 > M^2$	10
4.3 Horisonttien rakenne	10
5 Stationaariset rajat	11
5.1 Pyörre aika-avaruudessa	11
5.2 Stationaarisen rajan pinnat	12
5.3 Stationaaristen rajojen rakenne	14
6 Loppuhuomiot	15

1 Johdanto

Albert Einstein julkaisi yleisen suhteellisuusteorian lopullisen version joulukuussa vuonna 1915. Vain kaksi kuukautta myöhemmin Karl Schwarzschild esitti pyörimättömiä massajakaumia koskevan tyhjiöratkaisun Einsteinin kenttäyhtälöille. Yhtälöiden ratkaiseminen pyöriville massajakaumille osoittautui kuitenkin huomattavasti staattista tapausta vaikeammaksi ongelmaksi. Ratkaisun esitti lopulta Roy Kerr vuonna 1963 [1], lähes puoli vuosisataa yleisen suhteellisuusteorian valmistumisen jälkeen.

Kerrin ratkaisulla on astrofysiikassa keskeinen rooli mustiin aukkoihin liittyvässä tutkimuksessa. Musta aukko on tapahtumahorisontiksi kutsutun pinnan rajaama aika-avaruuden alue, jossa painovoima on alueessa sijaitsevan äärimmäisen tiheän massajakauman vuoksi niin voimakas, etteivät sinne päätyneet hiukkaset voi paeta tapahtumahorisontin ulkopuolelle. Musta aukko syntyy esimerkiksi riittävän massiivisen tähden romahtaessa elinkaarensa lopussa. Mustien aukkojen pyörimisestä on viime vuosina saatu näyttöä esimerkiksi Linnunradan keskustassa sijaitsevasta supermassiivisesta mustasta aukosta tehtyjen havaintojen avulla [2]. Pyörivien mustien aukkojen uskotaan toimivan energianlähteenä paitsi aktiivisille galaksiytimille, kuten kvasaareille ja radiogalakseille, myös röntgenkaksostähdille ja mahdollisesti gammasädepurkauksille [3].

Tässä tutkielmassa esitellään ensin lyhyesti Kerrin ratkaisu pääominaisuuksineen, minkä jälkeen käsitellään yksityiskohtaisesti ratkaisun geometrinen rakenne: singulariteetti, tapahtumahorisontit ja stationaarisen rajan pinnat. Tarkastelussa käytetään apuna Schwarzschildin ratkaisua, joka oletetaan ennestään tunnetuksi. Ellei toisin mainita, johtamatta esitetyt tulokset ovat peräisin lähteistä [4] ja [5]. Tutkielmassa noudatetaan metriikan merkkikäytäntöä $(-, +, +, +)$ ja käytetään geometrisia yksiköitä, joissa $c = G = 1$.

2 Kerrin ratkaisu

2.1 Ratkaisun yksikäsitteisyydestä

Schwarzschildin ratkaisu on Birkhoffin teoreeman nojalla yksikäsitteinen pallosymmetrinen tyhjiöratkaisu Einsteinin yhtälöille. Se kuvaa aika-avaruutta pallosymmetrisen massajakauman ulkopuolella ja soveltuu siten esimerkiksi staattisen mustan aukon tai staattista tähteä ympäröivän tyhjiön kuvaamiseen. Astrofysikaaliset kappaleet kuitenkin tyypillisesti pyörivät akselinsa ympäri. Esimerkiksi pyörivän tähden romahtaessa mustaksi aukoksi kulmaliikemäärän säilymislain perusteella syntyy pyörivä musta aukko. Pyörivän massajakauman kulmaliikemäärä pyörimisakselin suuntaan rikkoo pallosymmetrian, joten Schwarzschildin ratkaisu ei sovellu tapauksen kuvaamiseen. Tarvitaan Schwarzschildin metriikan yleistys pyöriville massajakaumille: Kerrin metriikka.

Kerrin ratkaisu on aksiaalisymmetrinen tyhjiöratkaisu Einsteinin yhtälöille. Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, sillä Birkhoffin teoreeman kaltaista yleistä tulosta ei pyöriville aika-avaruuksille ole olemassa. Kerrin ratkaisussa pyörivän massajakauman ensimmäiset multipolimomentit ovat massa ja kulmaliikemäärä, ja korkeamman kertaluvun momentit määräytyvät yksikäsitteisesti näistä kahdesta. Yleisessä tapauksessa korkeamman kertaluvun multipolimomentit voivat kuitenkin olla mielivaltaiset, joten Kerrin ratkaisu

kuvaa yksittäistä erikoistapausta. Toisaalta kaukana pyörivästä kappaleesta korkeamman kertaluvun multipolimomentit lähestyvät nopeasti nollaa. Voidaankin osoittaa, että aika-avaruus yleisen pyörivän massajakauman ulkopuolella lähestyy geometrialtaan Kerrin ratkaisua asympotoottisesti [6].

Kun rajoitetaan tarkastelu mustiin aukkoihin, saadaan vahvempi tulos. Pyörivän massajakauman romahtaessa mustaksi aukoksi se säteilee kaikki säteiltävissä olevat multipolimomenttinsa pois [7]. Lopputuloksena on musta aukko, jonka ainoat riippumattomat multipolimomentit ovat massa ja kulmaliikemäärä. Tällaista mustaa aukkoa kuvaa Kerrin ratkaisu. Kerrin ratkaisu on näin ollen yksikäsitteinen ratkaisu stationaariselle, akselinsa ympäri pyörivälle mustalle aukolle, eli Kerrin mustalle aukolle [8]. Tässä tutkielmassa käsitellään yksinomaan Kerrin mustaa aukkoa.

2.2 Boyer–Lindquist-koordinaatit

Kerr esitti ratkaisunsa alun perin valonkaltaisissa koordinaateissa $(u, r, \theta, \tilde{\phi})^1$ [1]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (du - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi})^2 \\ & + 2(du - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi})(dr - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\tilde{\phi}^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Tämä metriikan muoto on kuitenkin laskennallisesti hankala, koska se sisältää useita ei-diagonaalisia termejä. Lisäksi selvän ajankaltaisen koordinaatin puute hankaloittaa tulosten tulkintaa. Yleistetyt Schwarzschildin koordinaatit, Boyer–Lindquist-koordinaatit (t, r, θ, ϕ) , tarjoavat ratkaisun molempiin näistä ongelmista. Boyer–Lindquist-koordinaatit minimoivat metriikan ei-diagonaalisten termien lukumäärän, sisältävät ajankaltaisen koordinaatin t sekä mahdollistavat suoraviivaisen vertailun Schwarzschildin tapaukseen. Nämä koordinaatit ovat Kerrin metriikan hyödyllisin muoto tässä tutkielmassa tehtävien tarkastelujen kannalta.

Boyer–Lindquist-koordinaatteihin siirrytään Kerrin metriikan alkuperäisestä muodosta (1) koordinaattimuunnoksien

$$du = dt + \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2Mr + a^2} dr, \quad (2)$$

$$d\tilde{\phi} = d\phi + \frac{a}{r^2 - 2Mr + a^2} dr. \quad (3)$$

Kerrin metriikka Boyer–Lindquist-koordinaateissa on

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ & + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (4)$$

¹Tässä on korjattu Kerrin vuoden 1963 artikkelissa esiintynyt parametrin a merkkivirhe [9].

missä

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad (5)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (6)$$

$$a \equiv L/M. \quad (7)$$

Tässä M on mustan aukon massa ja L kulmaliikemäärä. Kerrin parametri a on siten mustan aukon kulmaliikemäärä yksikkömassaa kohden.

Tässä tutkielmassa käytetään Boyer–Lindquist-koordinaatteja, ellei toisin mainita. Musta aukko pyörii näissä koordinaateissa akselin $\theta = 0$ ympäri, koordinaatin ϕ suuntaan, kun Kerrin parametri a on positiivinen. Parametrin a etumerkin vaihtuessa mustan aukon pyörimissuunta vaihtuu.

2.3 Metriikan ominaisuuksia

Tarkastellaan nyt lyhyesti muutamia oleellisia Kerrin metriikan ominaisuuksia, joita hyödynnetään seuraavissa luvuissa.

Rajalla $a \rightarrow 0$ musta aukko ei pyöri, $\Delta \rightarrow r^2 - 2Mr$, $\rho^2 \rightarrow r^2$ ja Kerrin metriikka (4) palautuu Schwarzschildin metriikaksi

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8)$$

Rajalla $r \rightarrow \infty$ metriikka (4) lähestyy Minkowskin metriikkaa

$$ds^2 \simeq - dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (9)$$

Siis kuten Schwarzschildin metriikka, myös Kerrin metriikka on asympotoottisesti laakea.

Metriikan (4) komponentit ovat lisäksi riippumattomia koordinaateista t ja ϕ , mikä osoittaa, että ratkaisu on stationaarinen ja symmetrinen pyörimisakselinsa suhteen. Toisin sanoen on olemassa Killingin vektorit

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)} = (1, 0, 0, 0) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\xi}_{(\phi)} = (0, 0, 0, 1). \quad (10)$$

Nelinopeudella \mathbf{u} liikkuvalla hiukkasella on tällöin kaksi säilyvää suuretta:

$$\epsilon \equiv -\boldsymbol{\xi}_{(t)} \cdot \mathbf{u} = -u_t = -(g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi), \quad (11)$$

$$l \equiv \boldsymbol{\xi}_{(\phi)} \cdot \mathbf{u} = u_\phi = g_{t\phi}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi. \quad (12)$$

Kaukana mustasta aukosta nämä suureet voidaan massiivisille hiukkasille tulkita energiaksi yksikkömassaa kohden ja kulmaliikemääräksi yksikkömassaa kohden. Massattomille hiukkasille puolestaan voidaan valita affiini parametri siten, että hiukkasen neliliikemäärä ja nelinopeus ovat yhtä suureet: $p^\mu = u^\mu$. Tällöin suureet ϵ ja l voidaan tulkita hiukkasen energiaksi ja kulmaliikemääräksi.

On huomioitava, että kulmaliikemäärän säilymisellä viitataan tässä yhteydessä ai-

noastaan kulmaliikemäärän mustan aukon pyörimisakselin suuntaiseen komponenttiin. Hiukkasen kulmaliikemäärä kokonaisuudessaan ei säily, koska Kerrin aika-avaruus ei ole pallosymmetrinen.

3 Singulariteetti

3.1 Aika-avaruuden singulariteetti

Aloitetaan Kerrin ratkaisun rakenteen selvittäminen tutkimalla metriikan (4) komponenttien käyttäytymistä. Huomataan ensin, että komponentit g_{tt} , $g_{t\phi}$ ja $g_{\phi\phi}$ ovat singulaarisia, kun $\rho = 0$. Määritelmän (6) mukaan tämä toteutuu, kun

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \implies r = 0 \text{ ja } \theta = \pi/2. \quad (13)$$

Schwarzschildin ratkaisu antaa nyt vihjeen singulariteetin luonteesta. Rajalla $a \rightarrow 0$ ehto (13) on riippumaton koordinaatista θ , ja piste $r = 0$ tunnustetaan staattisen mustan aukon aika-avaruuden singulariteetiksi. Näin ollen voidaan perustellusti odottaa, että kyseessä on fyysikaalinen singulariteetti myös pyörivän mustan aukon tapauksessa.

Vahvistetaan singulariteetin luonne Kerrin metriikassa laskemalla Riemannin tensorista invariantti Kretschmannin skalaari

$$K \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\rho^4 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}}. \quad (14)$$

Yhtälöstä nähdään, että Kretschmannin skalaari K kasvaa rajatta, kun $\rho \rightarrow 0$. Koska skalaarin arvo ei riipu valituista koordinaateista, kyseessä ei ole pelkkä koordinaattisingulariteetti. Kerrin aika-avaruus on siis singulaarinen, kun $\rho = 0$.

3.2 Kerr–Schild-koordinaatit

Boyer–Lindquist-koordinaateissa singulariteetin geometrinen rakenne jää kuitenkin epäselväksi. Kuinka tulkitaan se, että Kerrin aika-avaruus on singulaarinen koordinaattien arvoilla $r = 0$, $\theta = \pi/2$, mutta ei kuitenkaan arvoilla $r = 0$, $\theta \neq \pi/2$? Boyer–Lindquist-koordinaattien tulkitsemiseksi sekä singulariteetin rakenteen selvittämiseksi siirrytään hetkellisesti tähän tarkoitukseen paremmin soveltuviin koordinaatteihin.

Singulariteetin tarkastelun kannalta valaisevin Kerrin metriikan muoto on kvasi-kartesiset Kerr–Schild-koordinaatit (\tilde{t}, x, y, z) , jotka Kerr esitteli osana vuoden 1963 artikkeliaan. Kerr–Schild-koordinaatteihin siirrytään metriikan Boyer–Lindquist-muodosta (4) koordinaattimuunnoksin

$$d\tilde{t} = dt + \frac{2Mr}{\Delta} dr, \quad (15)$$

$$x = (r \cos \phi' + a \sin \phi') \sin \theta, \quad (16)$$

$$y = (r \sin \phi' - a \cos \phi') \sin \theta, \quad (17)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (18)$$

missä

$$d\phi' = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (19)$$

Metriikka Kerr–Schild-koordinaateissa on

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[d\tilde{t} + \frac{r(x dx + y dy) - a(x dy - y dx)}{r^2 + a^2} + \frac{z dz}{r} \right]^2, \quad (20)$$

missä r on nyt koordinaattien (x, y, z) funktio ja määräytyy yhtälöstä

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0. \quad (21)$$

Kerr–Schild-koordinaatit (x, y, z) voidaan tulkita likimääräisesti euklidisen avaruuden karteesisiksi koordinaateiksi. Ne tarjoavat siten intuitiivisen avaruuden Kerrin ratkaisun visualisointiin, kun Boyer–Lindquist-koordinaatit tulkitaan koordinaattien (x, y, z) funktioiksi. Näissä koordinaateissa z -akseli vastaa Boyer–Lindquist-koordinaattien symmetria-akselia $\theta = 0$, siis musta aukko pyörii z -akselin ympäri. Tässä tutkielmassa kaikki kuvat esitetään Kerr–Schild-koordinaateissa.

3.3 Singulariteetin rakenne

Singulariteetin geometrinen rakenne selviää nyt suoraviivaisesti. Muunnoksia (16)–(17) käyttämällä saadaan Kerr–Schild-koordinaattien ja Boyer–Lindquist-koordinaattien välille yhteys

$$x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta. \quad (22)$$

Kun $r = 0$ ja $\theta = \pi/2$, yhtälöistä (18) ja (22) seuraa

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (23)$$

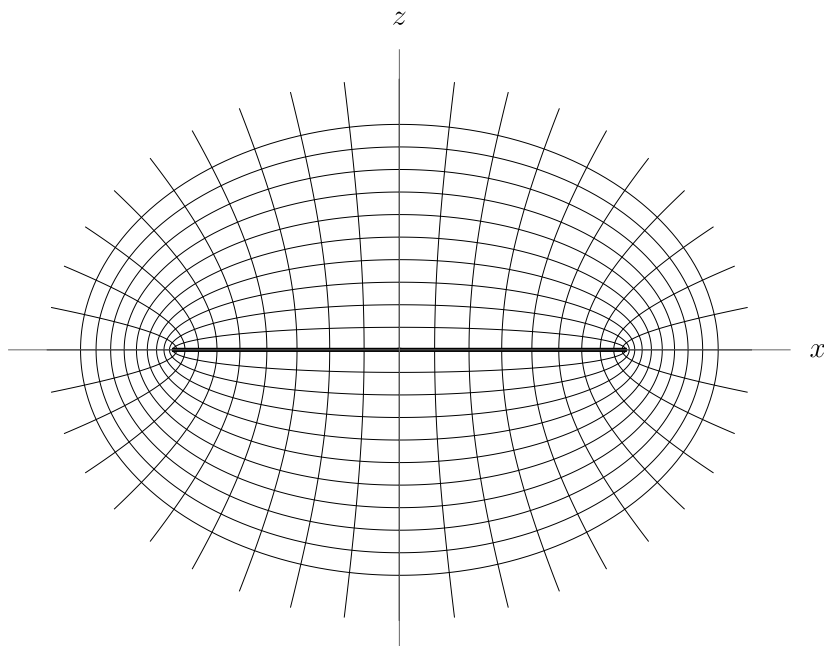
Pyörivän mustan aukon singulariteetti on siis $|a|$ -säteinen rengas ekvaattoritasossa $z = 0$. Lisäksi nähdään, että koordinaatit $r = 0$, $\theta \neq \pi/2$ vastaavat pisteitä kiekossa

$$x^2 + y^2 < a^2, \quad z = 0. \quad (24)$$

Rengassingulariteetti ja Boyer–Lindquist-koordinaatit on havainnollistettu kuvassa 1.

Huomioidaan tässä erityisesti, että kiekkoa $r = 0$ lähestyvän hiukkasen rata leikkaa rengassingulariteetin ainoastaan mustan aukon ekvaattoritasossa. Siis toisin kuin Schwarzschildin staattisen mustan aukon tapauksessa, Kerrin mustaan aukkoon putoava hiukkanen ei välttämättä päädy singulariteettiin, kun $r \rightarrow 0$.

Schwarzschildin rajalla $a \rightarrow 0$ rengassingulariteetti palautuu staattisen mustan aukon pistesingulariteetiksi.



Kuva 1: Singulariteetti ja Boyer–Lindquist-koordinaatit. Kuvassa ellipsit ovat pintoja, joille $r = \text{vakio}$, ja käyrät pintoja, joille $\theta = \text{vakio}$. Lihavoitu viiva kuvaa kiekkoa $r = 0$, jonka reuna on mustan aukon singulariteetti. Kuvan leikkaus on $\tilde{t} = \text{vakio}$, $y = 0$.

4 Horisontit

4.1 Koordinaattisingulariteetti

Jatketaan Kerrin metriikan komponenttien tarkastelua. Metriikalla (4) on toinenkin singulariteetti: komponentti g_{rr} on singulaarinen, kun $\Delta = 0$. Määritelmän (5) mukaan tämä toteutuu, kun

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \quad \implies \quad r = r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (25)$$

Schwarzschildin ratkaisu antaa jälleen osviittaa singulariteetin todellisesta luonteesta. Schwarzschildin koordinaateilla on tunnetusti koordinaattisingulariteetti säteellä $r = 2M$. Ehdosta (25) nähdäänkin, että staattisella rajalla $a \rightarrow 0$ Boyer–Lindquist-koordinaateissa $\Delta = 0$, kun $r = 2M$. On siis odotettavissa, että kyse on koordinaattisingulariteetista myös Boyer–Lindquist-koordinaateissa. Osoitetaan nyt, että näin todellakin on.

Yhtälöstä (14) nähdään, että Kretschmannin skalaari on äärellinen, kun $r = r_{\pm}$. Tämä on välttämätön, mutta ei kuitenkaan riittävä ehto sille, että kyseessä on koordinaattisingulariteetti. Schwarzschildin ratkaisussa koordinaattisingulariteetti $r = 2M$ voidaan välttää siirtymällä Kruskalin koordinaatteihin, joissa tätä singulariteettia ei esiinny. Huomataan nyt, että luvussa 3.2 esitellyt Kerr–Schild-koordinaatit ajavat saman asian Kerrin ratkaisussa, sillä metriikka (20) ei ole singulaarinen, kun $r = r_{\pm}$ ja

$a \neq 0$. Tämä osoittaa, että alue $\Delta = 0$ on Boyer–Lindquist-koordinaateista aiheutuva koordinaattisingulariteetti, ei Kerrin aika-avaruuden singulariteetti.

4.2 Tapahtumahorisontit

Koordinaattisingulariteetin $\Delta = 0$ merkityksen selvittämiseksi tarkastellaan nyt pintoja, joille $r = \text{vakio}$. Pinnan määrittää funktio

$$\Phi(r) = r - \text{vakio} = 0. \quad (26)$$

Koska Φ on skalaari, pinnan normaalivektori on

$$n_\mu = \nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi = (0, 1, 0, 0) \quad (27)$$

ja normaalivektorin normi on

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = g^{rr}. \quad (28)$$

Metriikan kontravariantti komponentti g^{rr} löytyy Boyer–Lindquist-koordinaateissa suoraviivaisesti. Koska metriikka (4) voidaan esittää lohkodeagonaalisenä matriisina

$$g_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{cc|cc} g_{tt} & g_{t\phi} & 0 & 0 \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & g_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\theta\theta} \end{array} \right], \quad (29)$$

riittää laskea komponentin g_{rr} sisältävän lohkon käänteismatriisi. Triviaalisti saadaan

$$g^{rr} = g_{rr}^{-1} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad (30)$$

$$g^{\theta\theta} = g_{\theta\theta}^{-1} = \frac{1}{\rho^2}. \quad (31)$$

Yhtälöistä (28) ja (30) nähdään nyt, että kun $\Delta = 0$, myös $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$. Normaalivektori \mathbf{n} on siis valonkaltainen kaikkialla pinnoilla $r = r_\pm$, mikä osoittaa, että nämä pinnat ovat valonkaltaisia. Koska $r = r_\pm = \text{vakio}$, pinnat ovat lisäksi suljettuja. Valonkaltainen pinta sivuaa lokaalisti valokartiota kaikissa pisteissään, joten tulevaisuuden valokartiot ovat kallistuneet kokonaan pinnan yhdelle puolelle ja menneisyyden valokartiot toiselle. Tämä tarkoittaa, että fyysikaalisten hiukkasten maailmanviivat voivat läpäistä pinnan vain yhteen suuntaan. Koska suljettujen pintojen $r = r_\pm$ sisäpuolelle päätyneet hiukkaset eivät voi paeta pintojen ulkopuolelle, nämä pinnat ovat tapahtumahorisontteja.

Ratkaisusta (25) saadaan tapahtumahorisonteille mustan aukon massan M ja Kerrin parametrin a arvoista riippuen kolme laadullisesti erilaista tapausta: $a^2 < M^2$, $a^2 = M^2$ ja $a^2 > M^2$. Käsitellään seuraavaksi nämä tapaukset yksitellen.

4.2.1 Tapaus $a^2 < M^2$

Kun $a^2 < M^2$, Kerrin mustalla aukolla on kaksi tapahtumahorisonttia:

$$\begin{aligned} r_+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2}, \\ r_- &= M - \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Koska $r_- < r_+$, kutsutaan pintaa $r = r_+$ ulommaksi horisontiksi ja pintaa $r = r_-$ sisemmäksi horisontiksi. Horisontit jakavat Kerrin aika-avaruuden kolmeen säännölliseen alueeseen. Ulomman tapahtumahorisontin ulkopuolelle jäävää aluetta $r_+ < r$ nimitetään alueeksi I, horisonttien välistä aluetta $r_- < r < r_+$ alueeksi II ja sisemmän tapahtumahorisontin sisäpuolelle jäävää aluetta $r < r_-$ alueeksi III. Alue III sulkee sisälleen mustan aukon rengassingulariteetin.

Alueiden merkitys selviää tutkimalla niissä liikkuvien hiukkasten radiaalista käyttäytymistä. Tämä on yksinkertaisinta, kun täydennetään ensin Kerrin metriikassa (4) esiintyvät termit dt^2 , $dt d\phi$ ja $d\phi^2$ neliöksi, jolloin metriikka tulee muotoon

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \frac{\Delta \rho^2}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} dt^2 \\ &+ \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \left[d\phi - \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} dt \right]^2 \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Tarkastellaan sitten massiivista hiukkasta, jonka nelinopeus on \mathbf{u} . Metriikasta (33) saadaan suoraviivaisesti nelinopeuden normitusehdoksi

$$\begin{aligned} -1 &= - \frac{\Delta \rho^2}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} (u^t)^2 \\ &+ \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \left[u^\phi - \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} u^t \right]^2 \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta} (u^r)^2 + \rho^2 (u^\theta)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Ehdosta (25) nähdään, että alueessa I pätee $\Delta > 0$, ja määritelmän (6) mukaan ρ^2 on kaikkialla ei-negatiivinen. Ehto (34) ei tässä alueessa estä hiukkasen radiaalista liikettä, vaan hiukkanen voi liikkua sekä kohti mustaa aukkoa että pois päin siitä.

Alueessa II sen sijaan pätee $\Delta < 0$. Tällöin yhtälön (34) oikealla puolella on vain yksi negatiivinen termi, $\rho^2 (u^r)^2 / \Delta$. Jotta normitusehto toteutuisi, hiukkasen on tässä alueessa välttämättä liikuttava alkuperäiseen radiaaliseen kulkusuuntaansa. Koordinaatti r omaksuu siis alueessa II ajan roolin. Alueesta I ulomman tapahtumahorisontin sisäpuolelle ajautunut hiukkanen kulkeutuu siten välttämättä sisemmälle tapahtumahorisontille

ja alueeseen III. Koska alueesta II ei välity informaatiota mustan aukon ulkopuolelle alueeseen I, vastaa Kerrin mustan aukon ulompi tapahtumahorisontti $r = r_+$ rooliltaan Schwarzschildin staattisen mustan aukon tapahtumahorisonttia. Ulompaa horisonttia nimitetäänkin usein yksinkertaisesti Kerrin ratkaisun tapahtumahorisontiksi.

Alueessa III pätee jälleen $\Delta > 0$. Hiukkanen voi siis tässä alueessa taas vaihtaa radiaalista kulkusuuntaansa. Tästä seuraa, että jopa Kerrin mustan aukon ekvaattoritasossa liikkuva hiukkanen voi tapahtumahorisonttien läpi kuljettuaan välttää singulariteetin. Lisäksi tästä seuraa, että Einsteinin yhtälöiden alkuarvo-ongelman (Cauchyn ongelman) ratkaiseminen tässä alueessa edellyttää reuna-arvoja singulariteetista. Cauchyn ongelmalle ei siten ole hyvin määriteltyä ratkaisua alueessa III, toisin kuin alueissa I ja II. Sisempää horisonttia $r = r_-$ kutsutaan tästä syystä Cauchyn horisontiksi, ja se määrittää fysikaalisen ennustettavuuden takarajan.

Kerrin aika-avaruus voidaan lisäksi analyyttisesti laajentaa negatiivisille koordinaateille r , jolloin alue III määritellään avoimena välinä $-\infty < r < r_-$. Kulkiessaan alueessa III rengassingulariteetin rajaaman kiekon läpi hiukkanen päättyy tällöin toiseen asymptoottisesti laakeaan aika-avaruuteen, missä $r < 0$. Tässä toisessa aika-avaruudessa suljetut ajankaltaiset radat ovat mahdollisia, joten Kerrin ratkaisun laajennus johtaa kausaliteetin rikkoontumiseen [10]. Nämä laajennuksen epäfysikaaliset seuraukset ulottuvat singulariteetista sisemmälle tapahtumahorisontille asti, minkä nojalla koko alueen III fysikaalisuutta on syytä epäillä.

4.2.2 Tapaus $a^2 = M^2$

Kun $a^2 = M^2$ tai yhtäpitävästi $|L| = M^2$, tapahtumahorisontit yhdistyvät:

$$r_+ = r_- = M. \quad (35)$$

Tätä tapausta kutsutaan äärimmäiseksi mustaksi aukoksi. Horisonttien yhdistymisestä seuraa, että Kerrin aika-avaruuden aluetta II ei ole olemassa. Alueesta I tapahtumahorisontin läpi kulkenut hiukkanen päättyy siis suoraan singulariteetin sisältävään alueeseen III.

Havaintojen perusteella toistaiseksi tutkituista astrofysikaalisista mustista aukoista valtaosa pyörii nopeasti ($a > 0.8M$) ja noin puolet tutkituista kohteista on lähes äärimmäisiä ($a > 0.95M$) [11]. Suuret parametrin a arvot ovat seurausta siitä, että mustan aukon kulmaliikemäärä tyypillisesti kasvaa: Mustaa aukkoa kohti putoava aine muodostaa aukon ympärille kertymäkiekon, joka pyörii mustan aukon mukana. Kertymäkiekosta aukkoon putoava aine luovuttaa kulmaliikemääräänsä mustalle aukolle, jolloin mustan aukon kulmaliikemäärä kasvaa ajan mittaan. Toisaalta kertymäkiekon säteily hidastaa mustan aukon pyörimistä, sillä pyörivä musta aukko kaappaa enemmän negatiivisen kuin positiivisen kulmaliikemäärän fotoneja. Säteilyn hidastava vaikutus on olematon hitaasti pyörivälle mustalle aukolle mutta merkittävä, kun $a > 0.9M$. Mustaan aukkoon putoavan aineen ja säteilyn yhteisvaikutuksesta voidaankin laskea Kerrin parametrille teoreettinen yläraja $a \approx 0.998M$ [12]. Tämän tuloksen nojalla äärimmäisiä mustia aukkoja ei siis synny luonnollisesti.

4.2.3 Tapaus $a^2 > M^2$

Kun $a^2 > M^2$, yhtälöllä (25) ei ole reaalisia ratkaisuja. Tapahtumahorisontteja ei tällöin ole lainkaan, joten tässä tapauksessa on olemassa ainoastaan yksi aika-avaruuden alue, alue I = alue III. Tämä tapaus ei näin ollen kuvaa mustaa aukkoa.

Koska singulariteetin vaikutusalue on nyt tapahtumahorisontin rajaaman alueen sijaan koko aika-avaruus, ei fysikaalisia ennustuksia voida tehdä missään. Tällaista singulariteettia kutsutaan alastomaksi singulariteetiksi. Alastoman singulariteetin fysikaalisen ongelmallisuuden takia on esitetty kosminen sensuurikonjektuuri, jonka mukaan mikään luonnossa esiintyvä fysikaalinen prosessi ei tuota alastonta singulariteettia [13]. Konjektuuria ei ole todistettu, mutta havaintoja tai teoreettista näyttöä sen paikkansapitämättömydestäkään ei ole. Mikäli kosminen sensuurikonjektuuri pitää paikkansa, Kerrin ratkaisun tapaus $a^2 > M^2$ on epäfysikaalinen.

4.3 Horisonttien rakenne

Toisin kuin Schwarzschildin pallosymmetrisessä tapauksessa, Kerrin ratkaisussa tapahtumahorisontit eivät ole geometrisesti pallopintoja. Horisonttien täsmällisen muodon selvittämiseksi tarkastellaan nyt aikasiivua $t = \text{vakio}$ pinnalla $r = r_{\pm}$. Asettamalla $dr = dt = 0$ metriikasta (4) saadaan

$$ds^2 = \rho_{\pm}^2 d\theta^2 + \left(\frac{2Mr_{\pm}}{\rho_{\pm}} \right)^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (36)$$

missä

$$\rho_{\pm}^2 = r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (37)$$

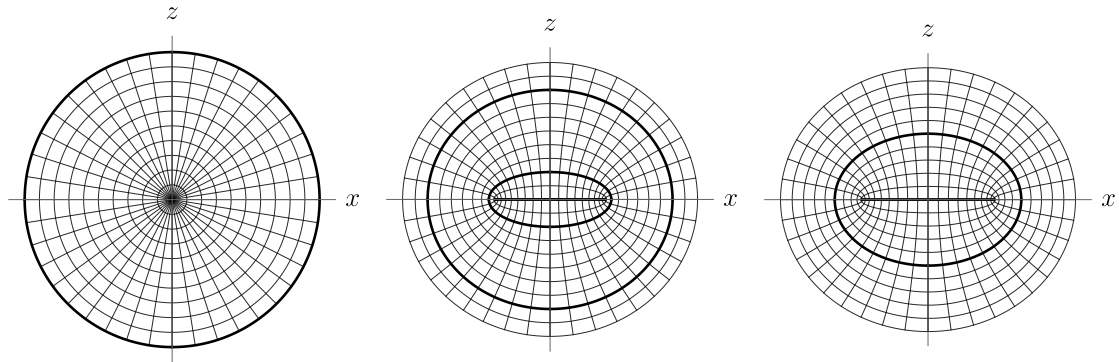
Metriikka (36) ei kuvaa pallopintaa, vaan ellipsoidia. Kerrin mustan aukon tapahtumahorisontit litistyvät navoilla $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ parametrin a kasvaessa. Maksimaalinen litistyminen saavutetaan äärimmäisen mustan aukon tapauksessa, jolloin $a^2 = M^2$.

Voidaan laskea tapahtumahorisonttien pinta-ala:

$$A_H^{\pm} = 4\pi(r_{\pm}^2 + a^2) = 8\pi(M^2 \pm \sqrt{M^4 - M^2 a^2}). \quad (38)$$

Ulomman tapahtumahorisontin pinta-ala on suurimmillaan staattisella rajalla $a \rightarrow 0$, jolloin tämä horisontti palautuu Schwarzschildin pallosymmetriseksi tapahtumahorisontiksi $r = 2M$. Horisontin pinta-ala on tällöin $A_H^+ = 16\pi M^2$. Tällä rajalla Kerrin ratkaisun sisempi tapahtumahorisontti puolestaan vetäytyy pistesingulariteettiin $r = 0$ ja sen pinta-ala on nolla. Kerrin parametrin a kasvaessa ulomman tapahtumahorisontin pinta-ala pienenee ja sisemmän kasvaa, kunnes rajalla $a \rightarrow M$ ne ovat yhtä suuret: $A_H^+ = A_H^- = 8\pi M^2$. Kerrin musta aukko siis kutistuu parametrin a kasvaessa. Tässä käsitellyt tapaukset on havainnollistettu kuvassa 2.

On huomioitava, että kaikissa fysikaalisissa prosesseissa mustan aukon kulmaliikemäärän kasvaessa myös mustan aukon massa kasvaa. Yhtälöstä (38) nähdään, että massan kasvaessa myös mustan aukon pinta-ala kasvaa. Stephen Hawking onkin osoittanut, et-



Kuva 2: Tapahtumahorisontit ja singulariteetti. Rajalla $a \rightarrow 0$ (vasemmalla) ulompi tapahtumahorisontti palautuu Schwarzschildin tapahtumahorisontiksi $r = 2M$ ja sisempi horisontti katoaa singulariteettiin $r = 0$. Kun $0 < a^2 < M^2$ (keskellä), tapahtumahorisontit lähestyvät toisiaan parametrin a kasvaessa. Äärimmäisellä rajalla $a^2 = M^2$ (oikealla) tapahtumahorisontit yhdistyvät ja mustan aukon pinta-ala minimoituu. Kuvien leikkaus on $\tilde{t} = \text{vakio}$, $y = 0$.

tä mustan aukon ulomman tapahtumahorisontin pinta-ala ei koskaan pienene missään klassisessa prosessissa [14].

5 Stationaariset rajat

5.1 Pyörre aika-avaruudessa

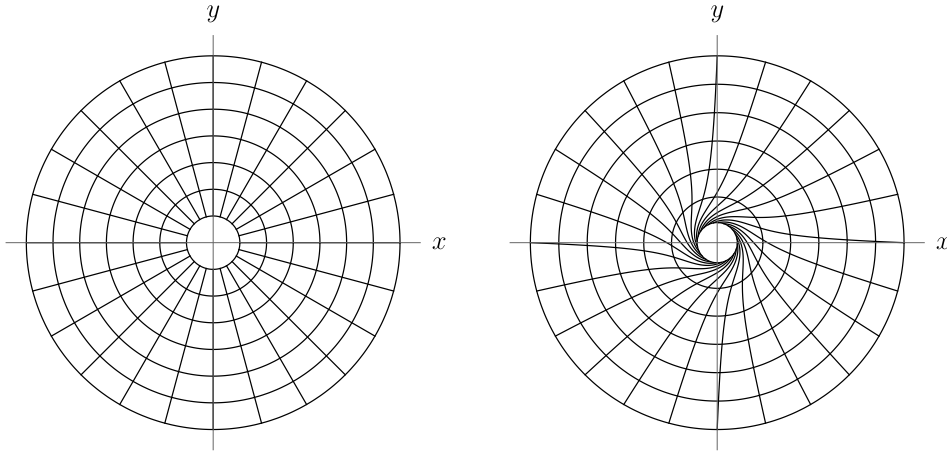
Tässä tutkielmassa on toistaiseksi tutkittu Kerrin mustan aukon vaikutusta hiukkasten radiaaliseen liikkeeseen. Ei-diagonaalisten komponenttien $g_{t\phi} = g_{\phi t}$ olemassaolo metriikassa (4) kuitenkin osoittaa, että mustan aukon pyörimisellä on myös toisenlainen, merkittävästi Schwarzschildin staattisesta tapauksesta poikkeava vaikutus aika-avaruuteen. Tämän vaikutuksen selvittämiseksi tarkastellaan nyt nelinopeudella \mathbf{u} kohti Kerrin mustaa aukkoa putoavaa hiukkasta, jonka kulmaliikemäärä on nolla. Hiukkanen pudotetaan matkaan kaukana mustasta aukosta. Kulmaliikemäärän (12) säilymisen nojalla

$$l = u_\phi = g_{t\phi}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi = 0. \quad (39)$$

Koska Kerrin metriikka on asympotoottisesti laakea, kaukana mustasta aukosta $g_{t\phi} \rightarrow 0$, jolloin selvästi myös $u^\phi = 0$. Yhtälön (39) avulla nähdään, että mustaa aukkoa lähestyessään hiukkanen kuitenkin saavuttaa kulmanopeuden

$$\omega(r, \theta) \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\phi}{u^t} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta}. \quad (40)$$

Vaikka hiukkasella on nyt nollasta poikkeava kulmanopeus, kulmaliikemäärän säilymisen nojalla hiukkasen kulmaliikemäärä on edelleen nolla. Tuloksen fyysikaalinen tulkinta on



Kuva 3: Aika-avaruus staattisen mustan aukon ympärillä (vasemmalla) ja pyörivän mustan aukon ympärillä (oikealla). Pyörivä musta aukko vetää aika-avaruutta mukanaan ja aiheuttaa pyörteen ympäröivään aika-avaruuteen. Kuvien leikkaus on $\tilde{t} = \text{vakio}$, $z = 0$.

seuraava: Pyöriessään Kerrin musta aukko vetää aika-avaruutta mukanaan ja aiheuttaa siten pyörteen aukkoa ympäröivässä aika-avaruudessa. Pudotessaan pyörteisessä aika-avaruudessa radiaalisesti kohti mustaa aukkoa hiukkanen saa kulmanopeuden mustan aukon pyörimissuuntaan. Pyörivän mustan aukon vaikutus ympäröivään aika-avaruuteen on esitetty kuvassa 3.

5.2 Stationaarisen rajan pinnat

Tutkitaan nyt tarkemmin aika-avaruuden pyörteen vaikutusta hiukkasten liikkeeseen. Luvussa 4.2 osoitettiin, että Kerrin ratkaisulla on tapahtumahorisontit $r = r_{\pm}$, joiden välisessä alueessa hiukkasten on välttämättä liikuttava tiettyyn radiaaliseen suuntaan. Tässä luvussa osoitetaan, että Kerrin ratkaisulla on vastaavat pinnat ja alue myös koordinaatin ϕ suuntaiselle liikkeelle.

Tarkastellaan ensin massiivista hiukkasta, joka pysyy paikallaan Kerrin aika-avaruudessa. Hiukkasen nelinopeus on tällöin $u^{\mu} = (u^t, 0, 0, 0)$. Asettamalla Kerrin metriikassa (4) $dr = d\theta = d\phi = 0$ saadaan nelinopeuden normitusehdoksi

$$-1 = g_{tt}(u^t)^2. \quad (41)$$

Ehto voi toteutua vain, kun

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) = -\left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) < 0. \quad (42)$$

Tästä yhtälöstä nähdään, että $g_{tt} = 0$, kun

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr = 0 \implies r = r_{S\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (43)$$

Kerrin metriikan komponentti g_{tt} on siis positiivinen, kun $r_{S-} < r < r_{S+}$. Ehto (41) ei tällöin toteudu, joten hiukkasen paikallaan pysyminen on tässä alueessa mahdotonta. Pintoja $r_{S\pm}$ kutsutaankin stationaarisen rajan pinnoiksi. Kuten tapahtumahorisonttien tapauksessa, kutsutaan pintaa r_{S+} ulommaksi ja pintaa r_{S-} sisemmäksi stationaarisen rajan pinnaksi. Tapahtumahorisonttien ja stationaarisen rajan pintojen määritelmiä (25) ja (43) vertaamalla nähdään, että aina pätee

$$r_{S-} \leq r_- \leq r_+ \leq r_{S+}. \quad (44)$$

Tutkitaan sitten massattomien hiukkasten käyttäytymistä. Lähetetään eri etäisyyksiltä matkaan fotoneja mustan aukon pyörimissuuntaan ja sitä vastaan. Tällaiselle fotonille pätee alkutilassa $dr = d\theta = 0$. Kerrin metriikasta (4) saadaan tällöin ehto

$$0 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2, \quad (45)$$

mistä voidaan ratkaista fotonin kulmanopeus

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}. \quad (46)$$

Tarkastellaan tilannetta ensin kaukana mustasta aukosta. Koska Kerrin metriikka on asympotoottisesti laakea, kaukana mustasta aukosta pätee $g_{tt} < 0$ ja $g_{\phi\phi} > 0$. Yhtälöstä (46) saadaan tällöin

$$\Omega_+ = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_+ = \omega + \sqrt{\omega^2 + \left|\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right|} > 0, \quad (47)$$

$$\Omega_- = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_- = \omega - \sqrt{\omega^2 + \left|\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right|} < 0. \quad (48)$$

Tässä Ω_+ on mustan aukon pyörimissuuntaan ja Ω_- sitä vastaan lähetetyn fotonin kulmanopeus alkuhetkellä.

Kun siirretään fotonien lähtöpistettä kohti mustaa aukkoa, päädytään ensin ulomalle stationaarisen rajan pinnalle $r = r_{S+}$, missä $g_{tt} = 0$. Yhtälöistä (47)–(48) nähdään, että stationaariselta rajalta lähetettyjen fotonien kulmanopeudet yksinkertaistuvat muotoon $\Omega_+ = 2\omega$ ja $\Omega_- = 0$. Mustan aukon pyörimissuuntaa vastaan lähetetty foton on siis hetkellisesti paikallaan stationaarisen rajan pinnalla $r = r_{S+}$.

Pinnan $r = r_{S+}$ sisäpuolella Kerrin metriikan komponentista g_{tt} tulee positiivinen.

Fotonien kulmanopeudet ovat tällöin

$$\Omega_+ = \omega + \sqrt{\omega^2 - \left| \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right|} > 0, \quad (49)$$

$$\Omega_- = \omega - \sqrt{\omega^2 - \left| \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right|} > 0. \quad (50)$$

Nyt myös mustan aukon pyörimissuuntaa vastaan lähetetty fotoni pyörii mustan aukon mukana, positiivisen koordinaatin ϕ suuntaan. Alueessa $r_{S-} < r < r_{S+}$ sekä massiiviset että massattomat hiukkaset siis liikkuvat välttämättä mustan aukon pyörimissuuntaan.

Koordinaatin r arvon edelleen pienentyessä saavutetaan lopulta pinta, jolla pätee $\omega^2 = g_{tt}/g_{\phi\phi}$. Tässä ohitettavan laskun avulla voidaan osoittaa, että ehto $\omega^2 = g_{tt}/g_{\phi\phi}$ toteutuu, kun $\Delta = 0$. Kyseessä on siis ulompi tapahtumahorisontti $r = r_+$. Yhtälöistä (49)–(50) saadaan nyt

$$\Omega_{H+} = \Omega_+ = \Omega_- = \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a}{2Mr_+}. \quad (51)$$

Tämä on mustan aukon ulomman tapahtumahorisontin kulmanopeus. Kerrin musta aukko pyörii kuin kiinteä kappale, ja tapahtumahorisontilla kaikki hiukkaset pyörivät mustan aukon mukana kulmanopeudella Ω_{H+} .

Ulomman stationaarisen rajan pinnan ja tapahtumahorisontin väliin jäävää aluetta $r_+ < r < r_{S+}$ kutsutaan ergosfääriksi. Nimi tulee kreikan kielen sanasta ergon, joka tarkoittaa työtä. Nimitys on valittu siksi, että sopivalla prosessilla mustan aukon pyörimisenergialla voidaan tehdä ergosfäärissä työtä. Tätä kutsutaan Penrosen prosessiksi, ja sen käsittely ohitetaan tässä tutkielmassa.

Kuten edeltävässä tarkastelussa todettiin, ergosfäärissä kaikki hiukkaset liikkuvat välttämättä mustan aukon pyörimissuuntaan. Toisin kuin tapahtumahorisontin takaa, ergosfääristä on kuitenkin mahdollista paeta: ergosfääri sijaitsee ulomman tapahtumahorisontin ulkopuolella alueessa I, missä hiukkasilla voi ehdon (34) nojalla olla positiivinen nelinopeuden r -komponentti.

Kerrin aika-avaruuden alueessa III saadaan vastaavat tulokset sisemmälle stationaarisen rajan pinnalle ja tapahtumahorisontille, mutta käänteisessä järjestyksessä koordinaatin r suhteen. Sisemmällä tapahtumahorisontilla kaikki hiukkaset pyörivät sisemmän horisontin kulmanopeudella $\Omega_{H-} = a/(2Mr_-)$, joka ei ole sama kuin ulomman tapahtumahorisontin kulmanopeus. Singulariteettia lähestyessään hiukkaset liikkuvat välttämättä mustan aukon pyörimissuuntaan, kunnes ne ylittävät sisemmän stationaarisen rajan pinnan $r = r_{S-}$. Tämän rajan sisäpuolella hiukkaset voivat jälleen pysyä paikallaan.

5.3 Stationaaristen rajojen rakenne

Stationaarisen rajan pintojen geometrinen rakenne on tapahtumahorisontteja monimutkaisempi. Tarkastellaan aikasiivua $t = \text{vakio}$ pinnalla $r = r_{S\pm}$, jolloin metriikasta (4)

saadaan stationaarisen rajan pintojen metriikka

$$ds^2 = \frac{2M^3 r_{S\pm}}{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} d\theta^2 + 2(Mr_{S\pm} + a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (52)$$

Pintojen muotoa on vaikea hahmottaa suoraan tästä metriikasta, joten hyödynnetään jälleen Kerr–Schild-koordinaatteja. Koordinaattimuunnoksia (18) ja (22) käyttämällä saadaan stationaarisen rajan pinnoille yhteydet

$$x^2 + y^2 = \left[(M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta})^2 + a^2 \right] \sin^2 \theta, \quad (53)$$

$$z = (M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}) \cos \theta. \quad (54)$$

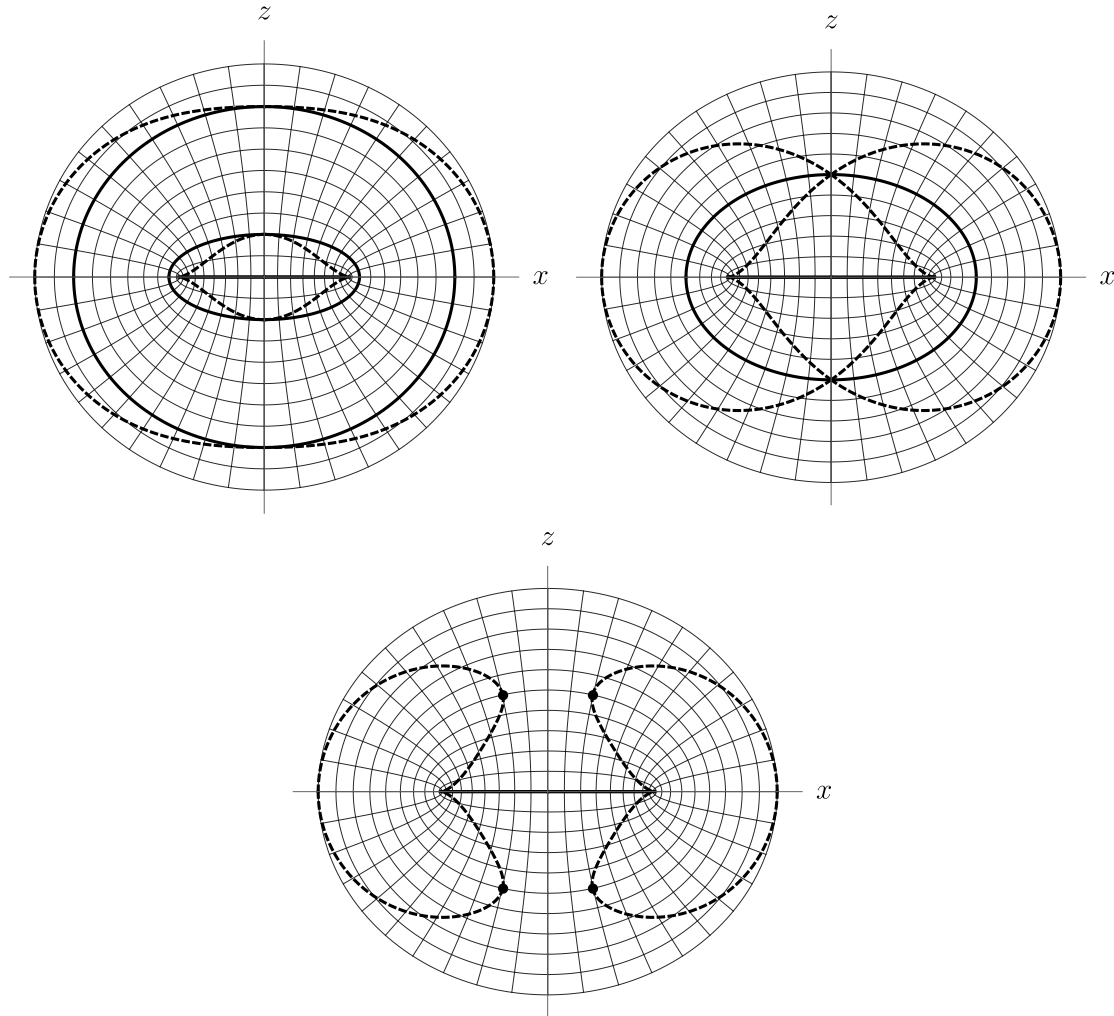
Nyt voidaan tehdä muutamia huomioita pintojen geometriasta. Mustan aukon navoilla, kun $\theta = 0$ tai $\theta = \pi$, ulompi stationaarisen rajan pinta yhdistyy ulompaan tapahtumahorisonttiin ja sisempi stationaarisen rajan pinta sisempään tapahtumahorisonttiin. Nämä pinnat ovat muualla erillään toisistaan, kun $a \neq 0$. Ekvaattoritasolla, kun $\theta = \pi/2$, sisempi stationaarisen rajan pinta koskettaa rengassingulariteettia. Koska pinnat $r = r_{S\pm}$ riippuvat koordinaatista θ , ne eivät ole yksinkertaisia ellipsoideja kuten ratkaisun tapahtumahorisontit. Sen sijaan Kerrin parametrin a kasvaessa ulompi stationaarisen rajan pinta muistuttaa muodoltaan torusta ja sisempi stationaarisen rajan pinta hyrrää.

Lisäksi massan M ja Kerrin parametrin a arvoista riippuen saadaan myös stationaarisen rajan pinnoille kolme laadullisesti erilaista tapausta. Kun $a^2 < M^2$, stationaarisen rajan pinnat ovat kaikkialla erillään toisistaan. Kun $a^2 = M^2$, tapahtumahorisonttien yhdistymisestä seuraa, että stationaarisen rajan pinnat koskettavat toisiaan mustan aukon navoilla. Kun $a^2 > M^2$, stationaarisen rajan pinnat liittyvät toisiinsa ja muodostavat yhdessä toruksen pinnan. Nämä tapaukset on esitetty kuvassa 4.

Schwarzschildin rajalla $a \rightarrow 0$ ulompi stationaarisen rajan pinta yhdistyy kaikkialla ulompaan tapahtumahorisonttiin, jolloin $r_{S+} = r_+ = 2M$. Vastaavasti sisempi stationaarisen rajan pinta yhdistyy sisempään tapahtumahorisonttiin, ja molemmat vetäytyvät staattisen mustan aukon pistesingulariteettiin: $r_{S-} = r_- = 0$.

6 Loppuhuomiot

Tässä tutkielmassa on esitetty Kerrin ratkaisun pääominaisuudet ja sen geometrinen rakenne. Esityksen tiivistämiseksi joitakin ratkaisun yksityiskohtia on kuitenkin jätetty käsittelemättä. Matemaattisen käsittelyn kannalta mainittavimmat puutteet ovat Kerrin ratkaisun johto ja maksimaalinen analyttinen laajennus. Yksityiskohtainen selvitys molemmista aiheista löytyy esimerkiksi lähteestä [15]. Fysikaalisesti oleellisista ratkaisun ominaisuuksista jäi käsittelemättä Penrosen prosessi, joka on tapa kerätä energiaa Kerrin mustasta aukosta ergosfääriä hyödyntämällä. Penrosen prosessi on esitetty artikkelissa [16]. Lisäksi mainittakoon, että ajankaltaiset suljetut radat Kerrin laajennetussa aika-avaruudessa tarjoavat mahdollisuuden aikamatkustukseen. Tätä käsitellään yksityiskohtaisesti lähteessä [17].



Kuva 4: Stationaarisen rajan pinnat, tapahtumahorisontit ja singulariteetti. Katkoviivoin piirretyt kuviot ovat stationaarisen rajan pintoja ja yhtenäiset lihavoidut ellipsit tapahtumahorisontteja. Kun $a^2 < M^2$ (ylhällä vasemmalla), ulompi stationaarisen rajan pinta ja tapahtumahorisontti ovat erillään sisemmästä stationaarisen rajan pinnasta ja tapahtumahorisontista. Kun $a^2 = M^2$ (ylhällä oikealla), tapahtumahorisontit yhdistyvät ja stationaarisen rajan pinnat koskettavat toisiaan mustan aukon navoilla. Kun $a^2 > M^2$ (alhaalla), tapahtumahorisontit häviävät ja stationaarisen rajan pinnat muodostavat yhdessä toruksen pinnan. Stationaarisen rajan pintojen liitoskohdat on merkitty kuvaan pisteillä. Kuvien leikkaus on $\tilde{t} = \text{vakio}$, $y = 0$.

Viitteet

- [1] R. P. Kerr. *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. Phys.Rev.Lett. **11** (1963), s. 238.
- [2] R. Genzel et al. *Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic Centre*. Nature **425** (2003), s. 936.
- [3] M. C. Begelman. *Accreting black holes*. Proceedings of the 26th Solvay Conference on Physics: Astrophysics and Cosmology, World Scientific (2014). arXiv: 1410.8132 [astro-ph.HE].
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne ja J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [5] M. Visser. *The Kerr spacetime: rotating black holes in general relativity*. Cambridge University Press, 2009. arXiv: 0706.0622 [gr-qc].
- [6] R. Beig ja W. Simon. *The stationary gravitational field near spatial infinity*. General Relativity and Gravitation **12** (1980), s. 1003.
- [7] R. H. Price. *Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse*. Phys. Rev. D **5** (1972), s. 2419.
- [8] D. C. Robinson. *Uniqueness of the Kerr black hole*. Phys. Rev. Lett. **34** (1975), s. 905.
- [9] R. P. Kerr. *Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics* (2007), s. 20. arXiv: 0706.1109 [gr-qc].
- [10] D. Raine ja E. Thomas. *Black holes: an introduction*. Imperial College Press, 2009, s. 103.
- [11] L. Brenneman. *Measuring the angular momentum of supermassive black holes*. Springer, 2013, s. 50. arXiv: 1309.6334 [astro-ph.HE].
- [12] K. S. Thorne. *Disk accretion onto a black hole. 2. Evolution of the hole*. Astrophys.J. **191** (1974), s. 509.
- [13] R. Penrose. *Gravitational collapse: the role of general relativity*. Riv.Nuovo Cim. **1** (1969), s. 273.
- [14] S. W. Hawking. *Gravitational radiation from colliding black holes*. Phys. Rev. Lett. **26** (1971), s. 1345.
- [15] J. Plebański ja A. Krasinski. *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [16] R. Penrose ja R. Floyd. *Extraction of rotational energy from a black hole*. Nature **229** (1971), s. 177.
- [17] B. O'Neill. *The geometry of Kerr black holes*. Dover Publications, 2014, s. 76.