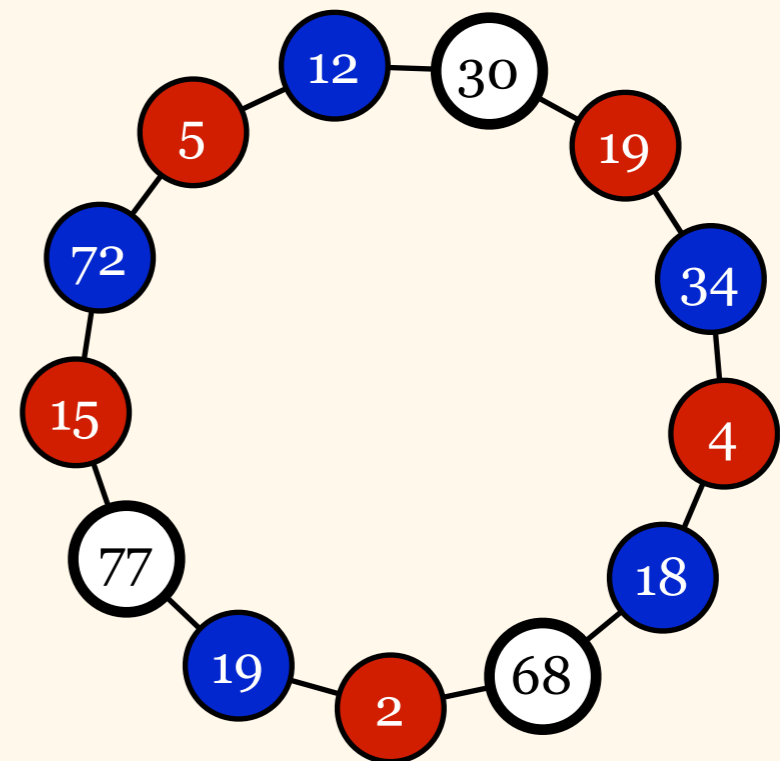


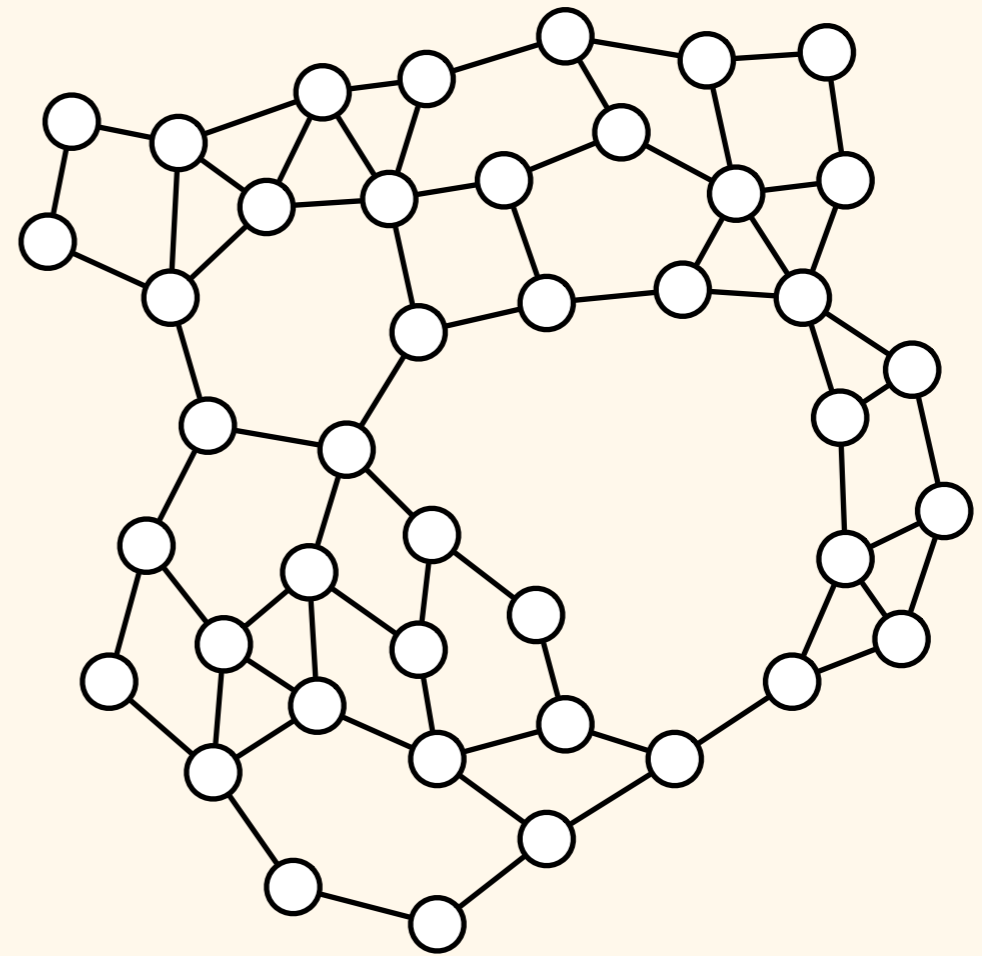
Verkon väritystä hajautetuilla algoritmeilla

Jukka Suomela

9. tammikuuta 2012

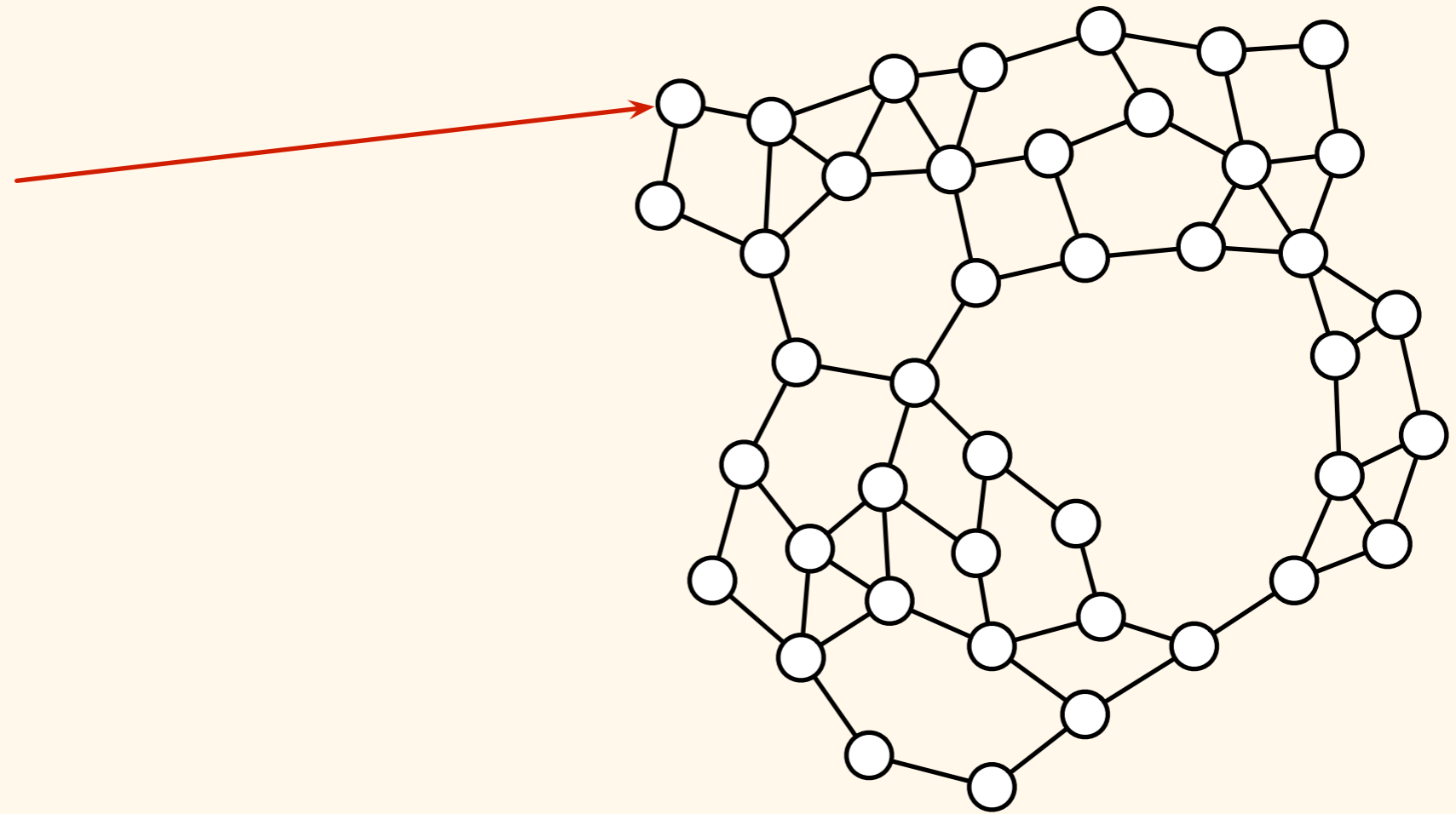


Verkko



Verkko

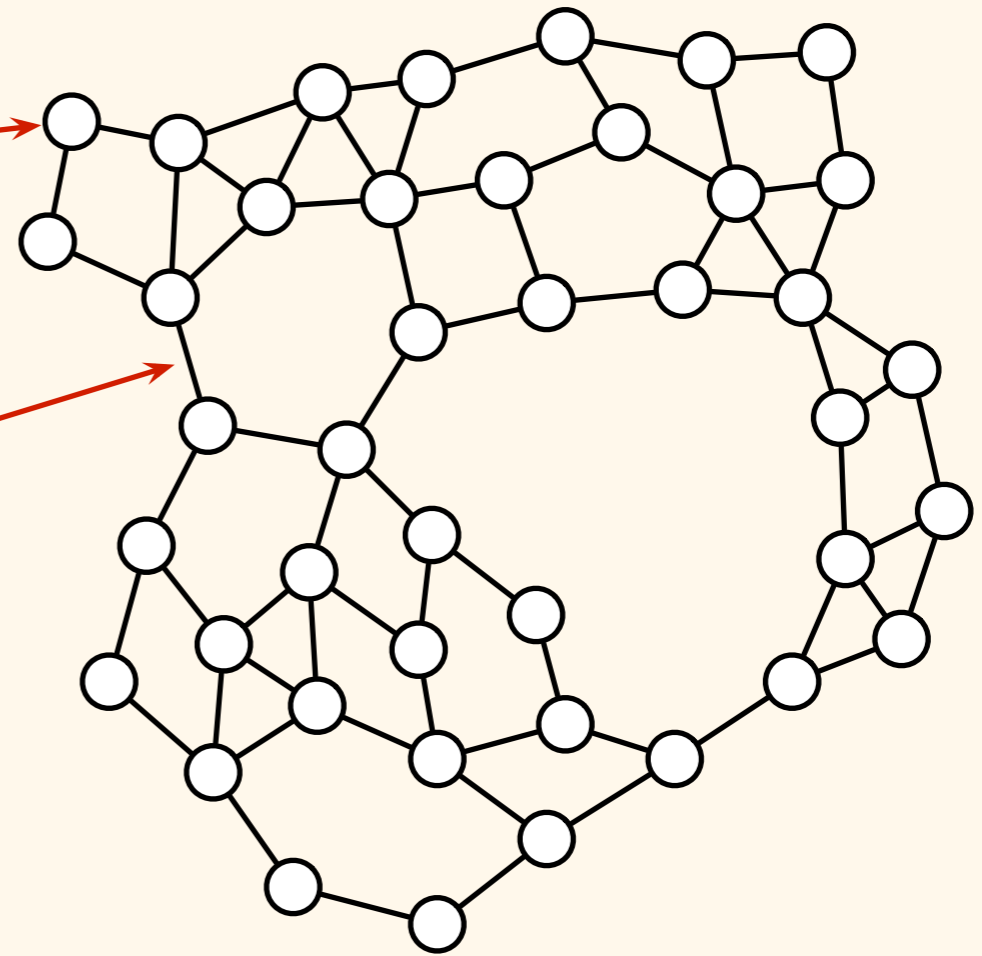
solmu



Verkko

solmu

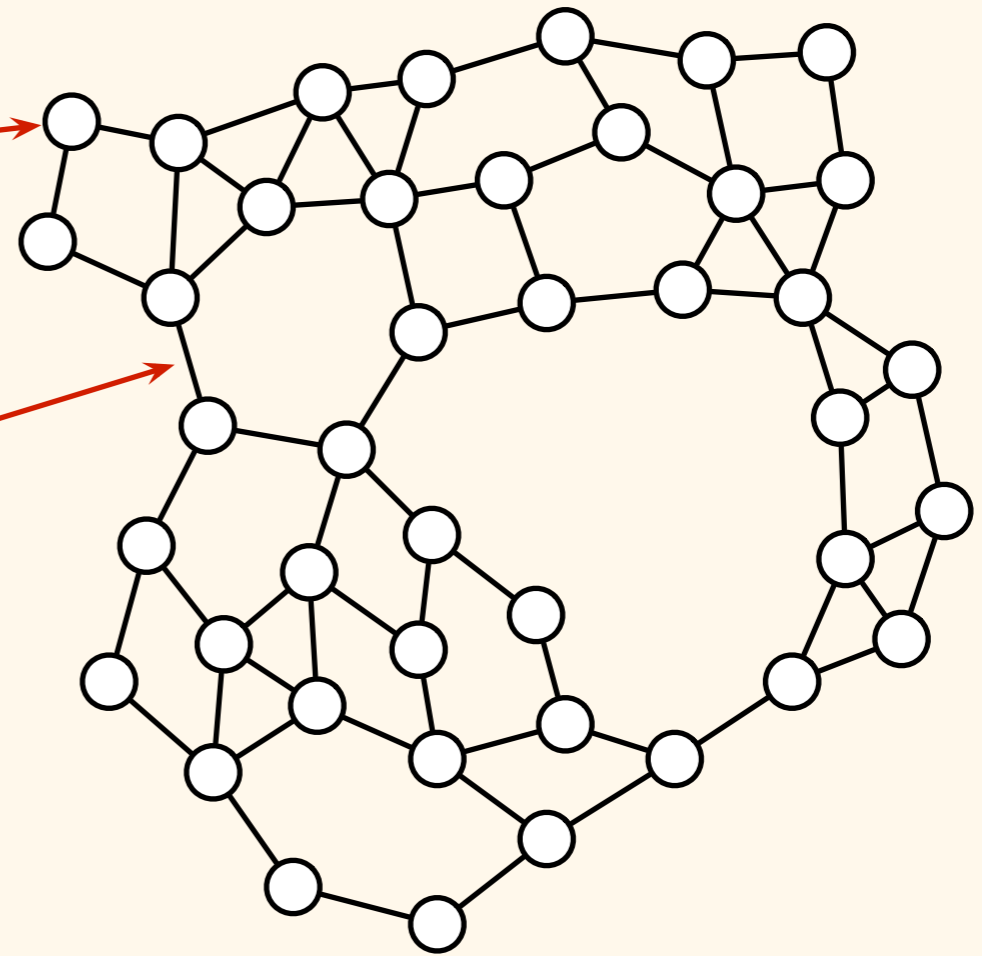
kaari



Hajautettu järjestelmä

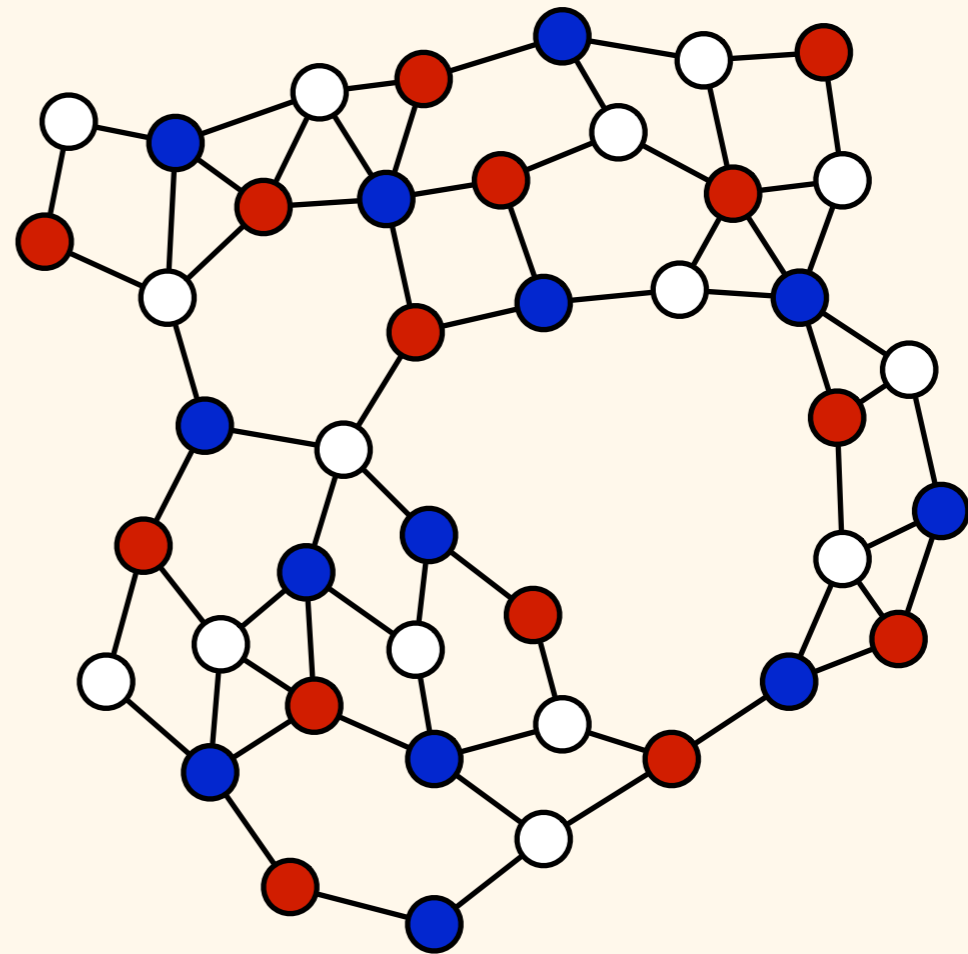
solmu
(tietokone)

kaari
(tiedonsiirtoyhteys)



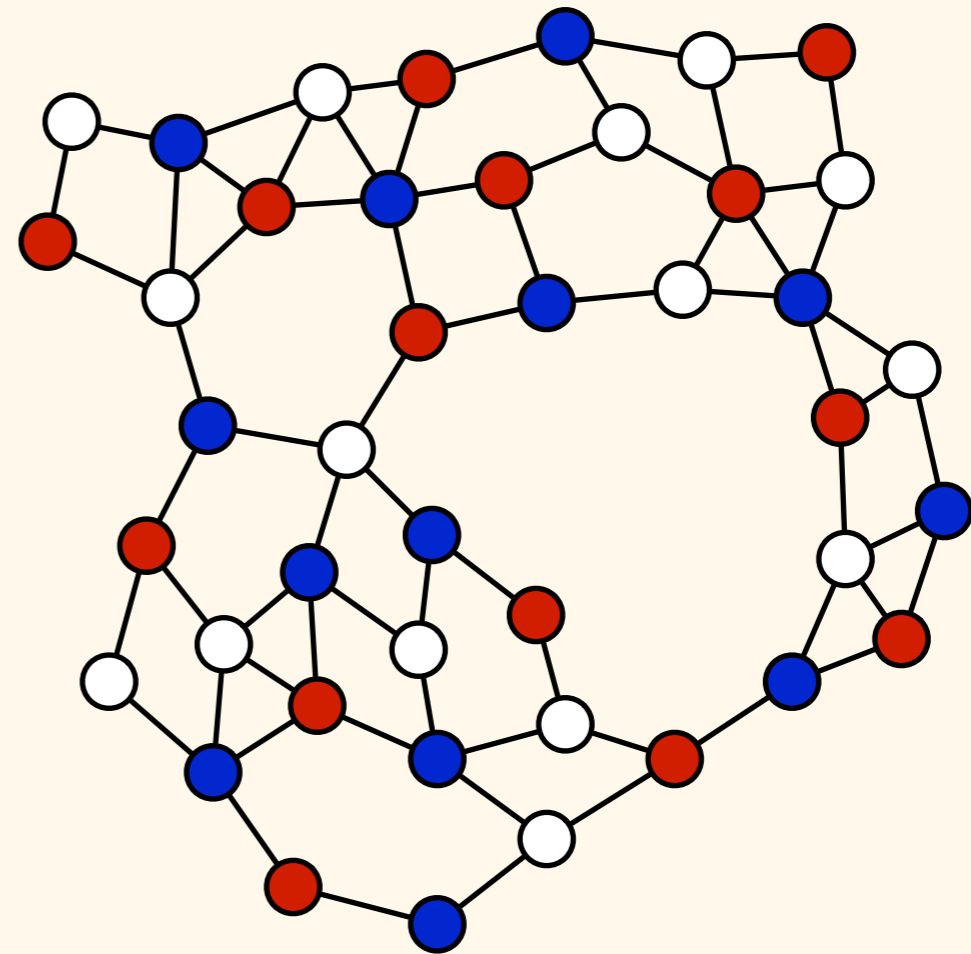
Verkon väritys

- Naapurisolmut aina eri värisiä
 - kukin solmu v tulostaa värin $c(v) \in \{1, 2, \dots, k\}$
 - jos verkossa on kaari $\{u, v\}$ niin oltava $c(u) \neq c(v)$



Verkon väritys

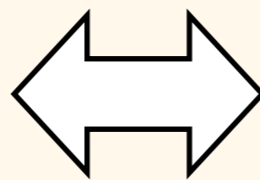
- Sovelluksia:
resurssien jakaminen,
aikatauluttaminen
 - kaari = radiolähetykset
häiritsevät toisiaan
 - väri = radiokanava
 - kaikki voivat lähettää
samaa aikaan



Verkon väritys

- Keskeinen hajautetun laskennan alalla
- Moni ongelma palautettavissa verkon väriytykseen – joskus myös päinvastoin

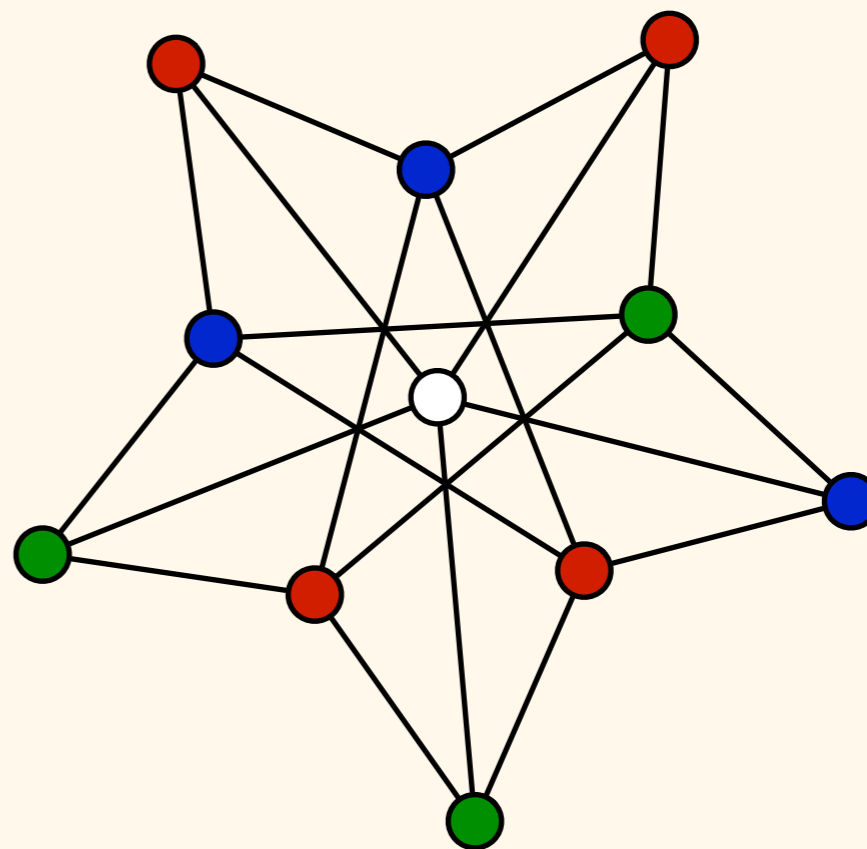
nopea
algoritmi
verkon
väriytykseen



nopea algoritmi
maksimaalisiin
riippumattomiin
joukkoihin

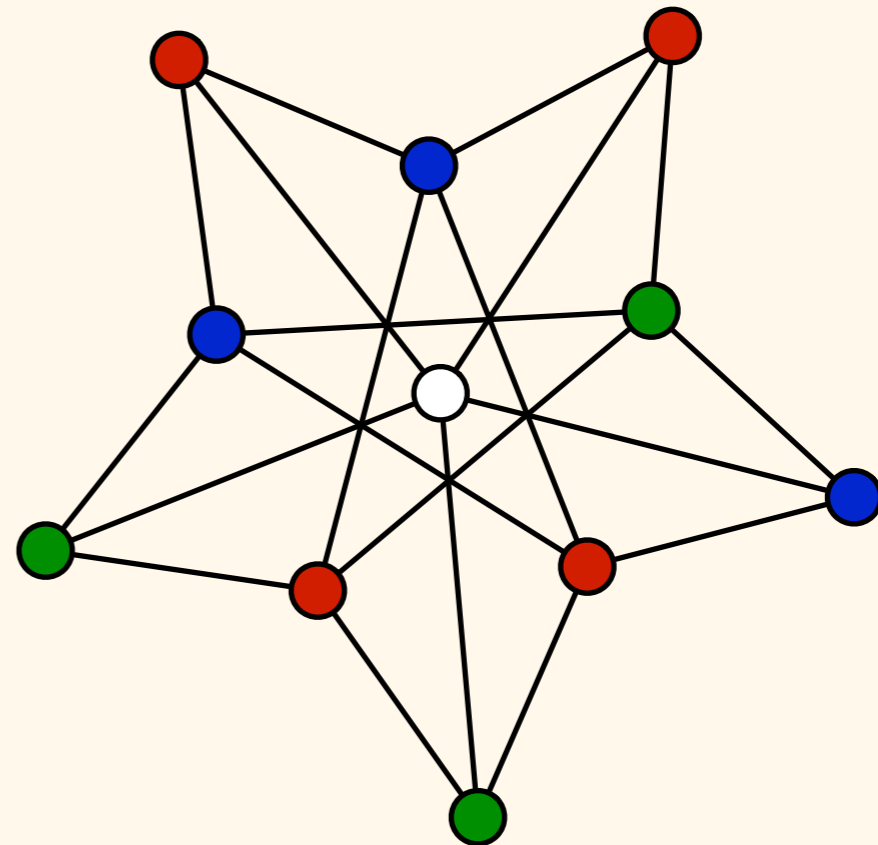
Verkon väritys

- Värittäminen mahdollisimman pienellä määrällä värejä vaikeaa
 - olisiko 3 väriä riittänyt tässä?
 - yleisesti NP-kova ongelma



Verkon väritys

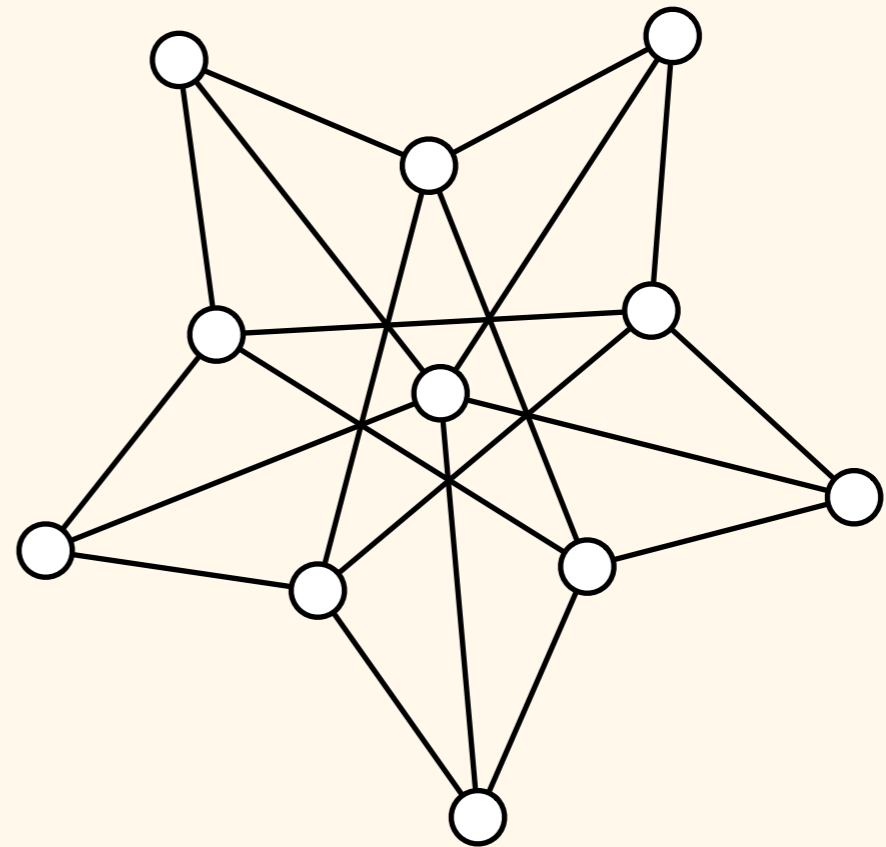
- Värittäminen mahdollisimman pienellä määrällä värejä vaikeaa
- Mutta hyvin helppoa, jos värejä käytettävissä reilusti
 - ahne algoritmi...



Verkon väritys

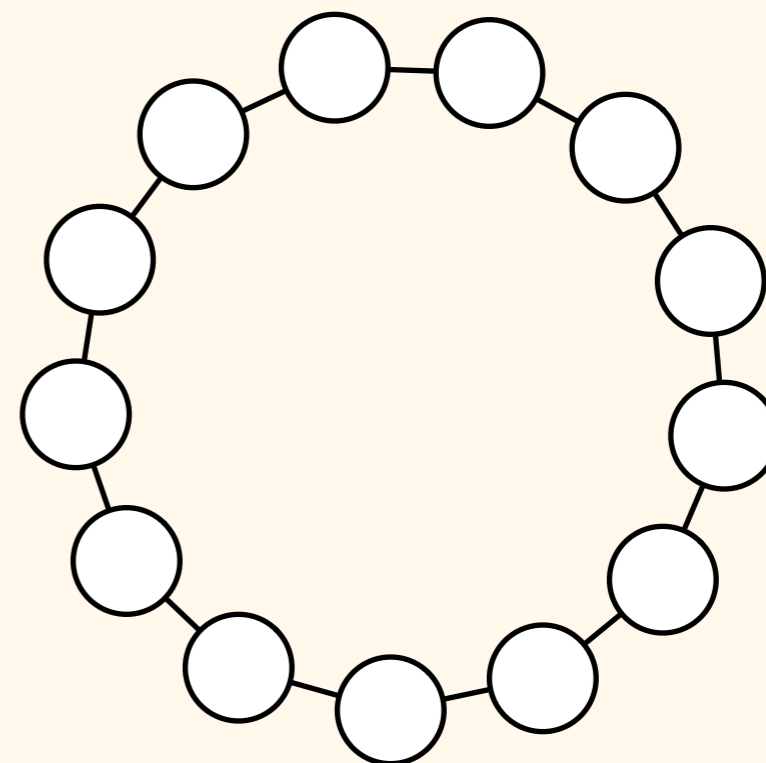
hajautetulla algoritmilla?

- Värittäminen mahdollisimman pienellä määrällä värejä vaikeaa
- Mutta ~~hajautetulla~~ ~~algoritmilla~~ ~~on~~ ~~helppoa~~ ~~käyttää~~ ~~niitä~~ ~~värejä~~ ~~reilusti~~
 - ~~hajautetulla~~ ~~algoritmilla~~...



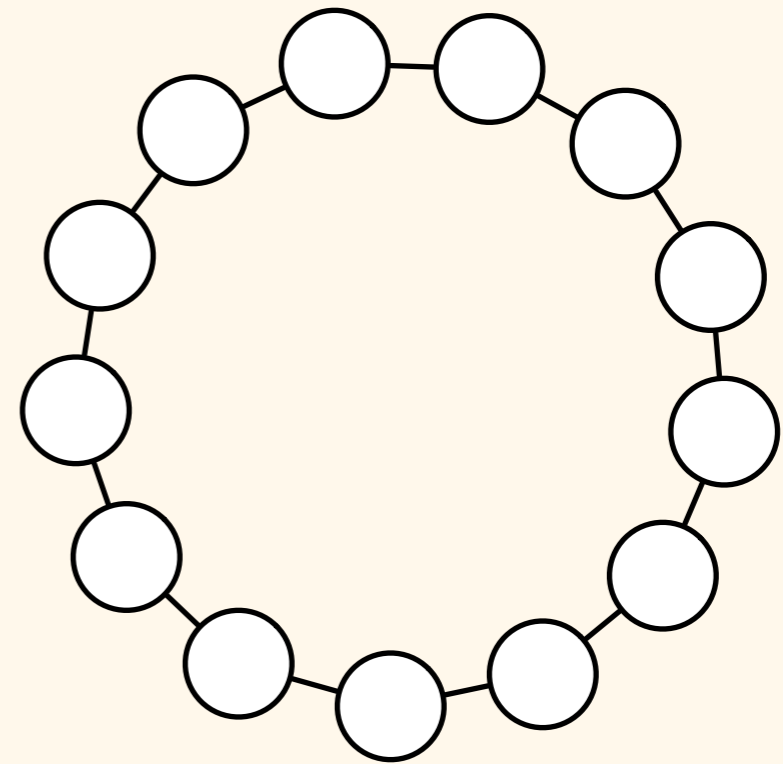
Verkon väriyty

- Miten rikkoa symmetria?
 - identtiset tietokoneet
 - sama deterministinen algoritmi
 - käynnistetään samaan aikaan, toimivat synkronisesti
 - symmetrinen verkko



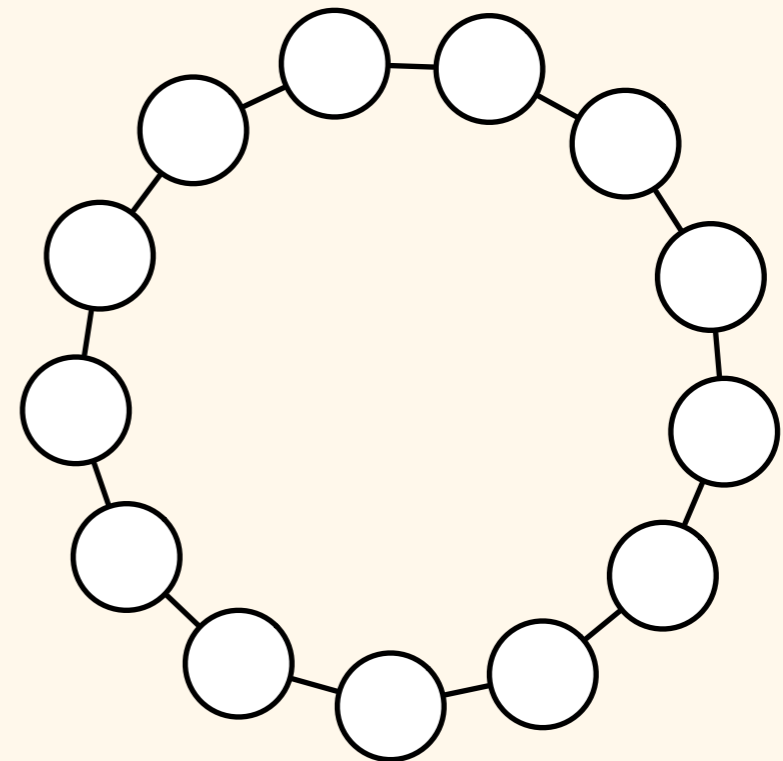
Verkon väritys

- Kaikki solmut samassa tilassa ennen kierrosta 1
 - kaikki lähettävät samat viestit kierroksella 1
 - kaikki vastaanottavat samat viestit kierroksella 1
- Kaikki solmut samassa tilassa kierroksen 1 jälkeen



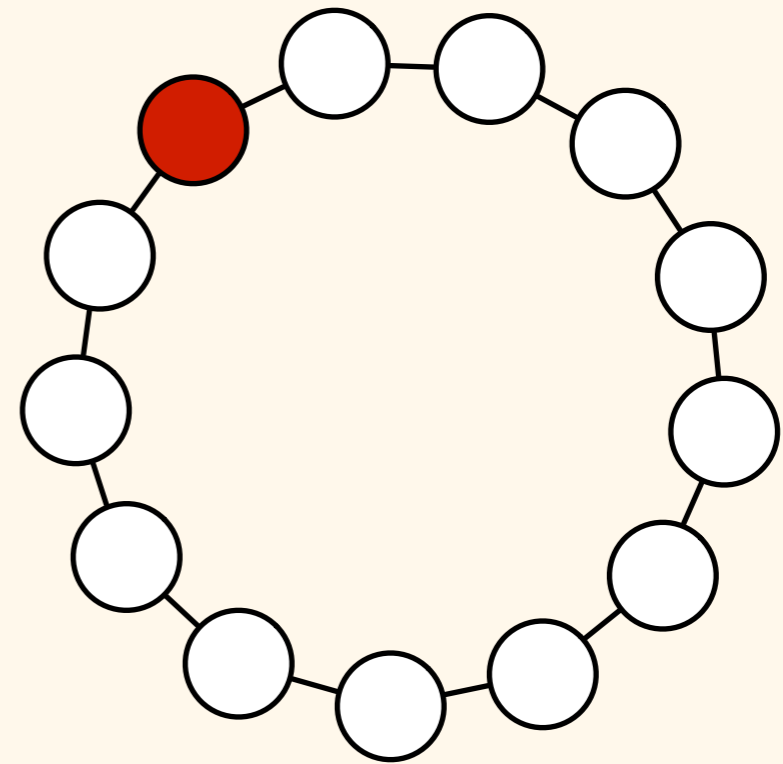
Verkon väritys

- Kaikki solmut samassa tilassa ennen kierrosta i
 - kaikki lähettävät samat viestit kierroksella i
 - kaikki vastaanottavat samat viestit kierroksella i
- Kaikki solmut samassa tilassa kierroksen i jälkeen



Verkon väritys

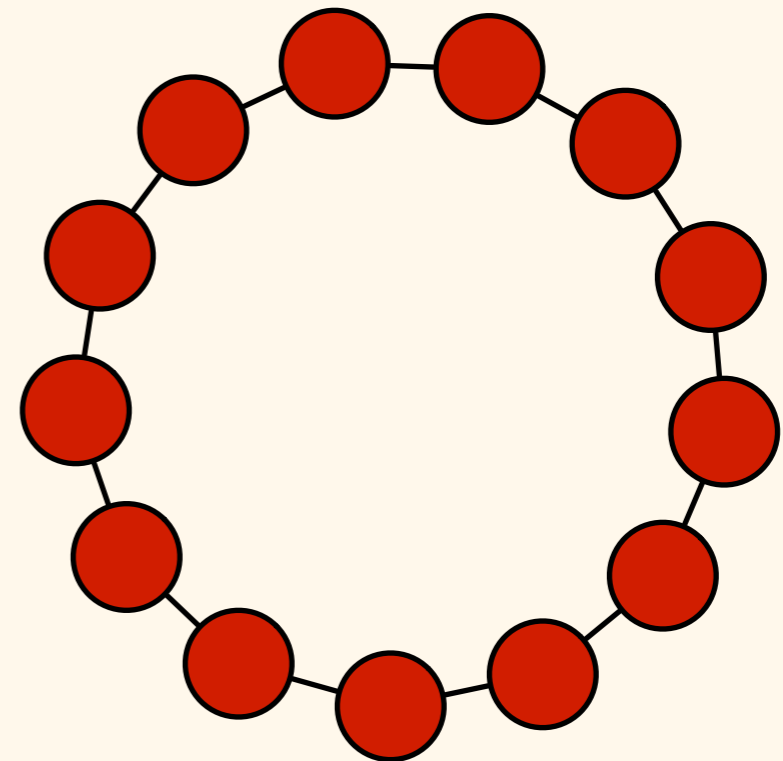
- Jos kierroksen i jälkeen jokin solmu tulostaa värin x ja pysähtyy...



Verkon väritys

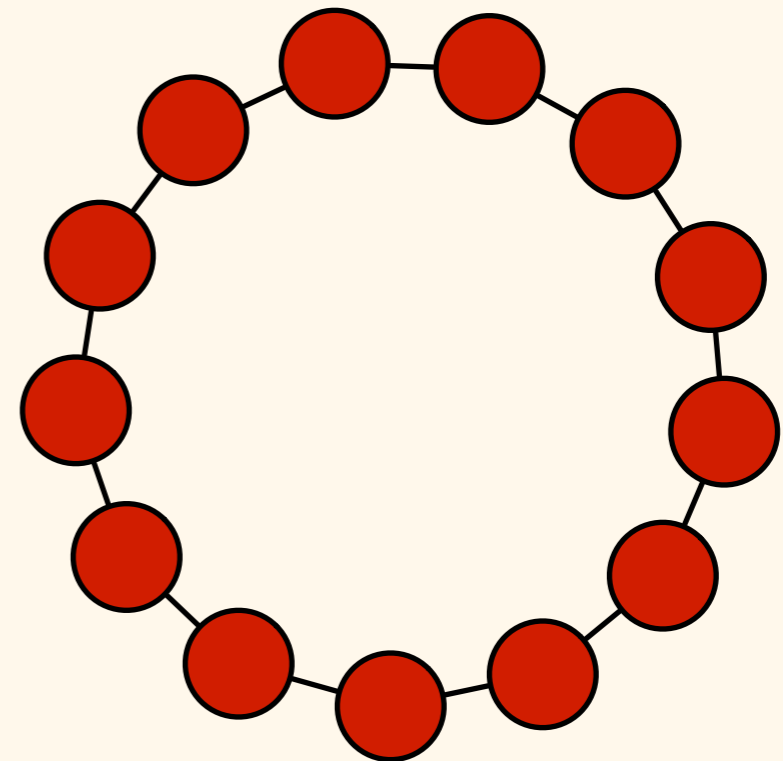
- Jos kierroksen i jälkeen jokin solmu tulostaa värin x ja pysähtyy...

... niin kaikki muutkin solmut tulostavat samanaikaisesti saman värin x ja pysähtyvät



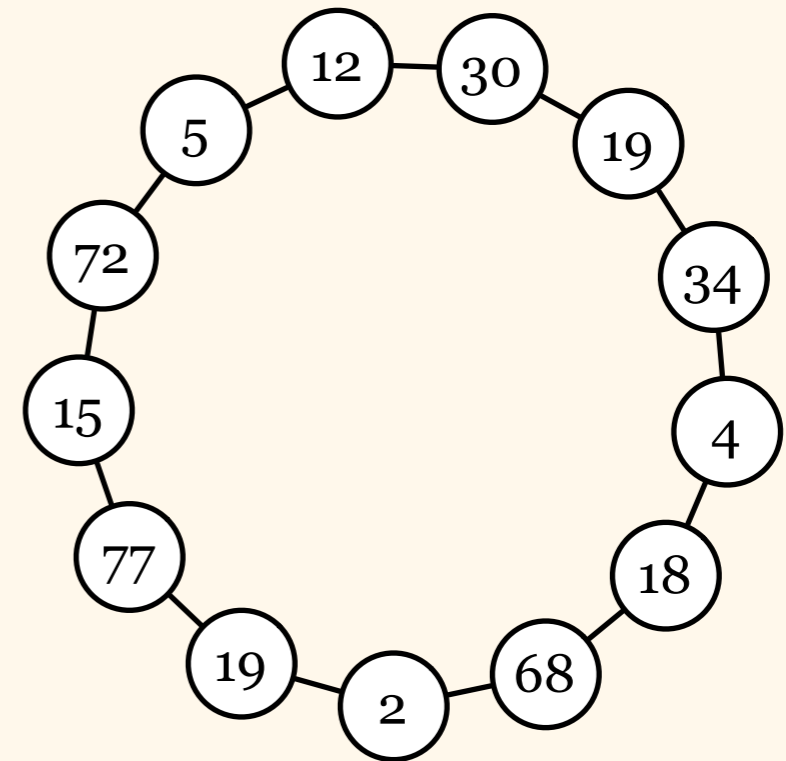
Verkon väritys

- Mikään deterministinen hajautettu algoritmi ei voi tuottaa kelvollista väritystä (esim. syklissä)
- Ellei käytettävissä ole jotain *lisäinformaatiota*, joka rikkoo symmetrian...



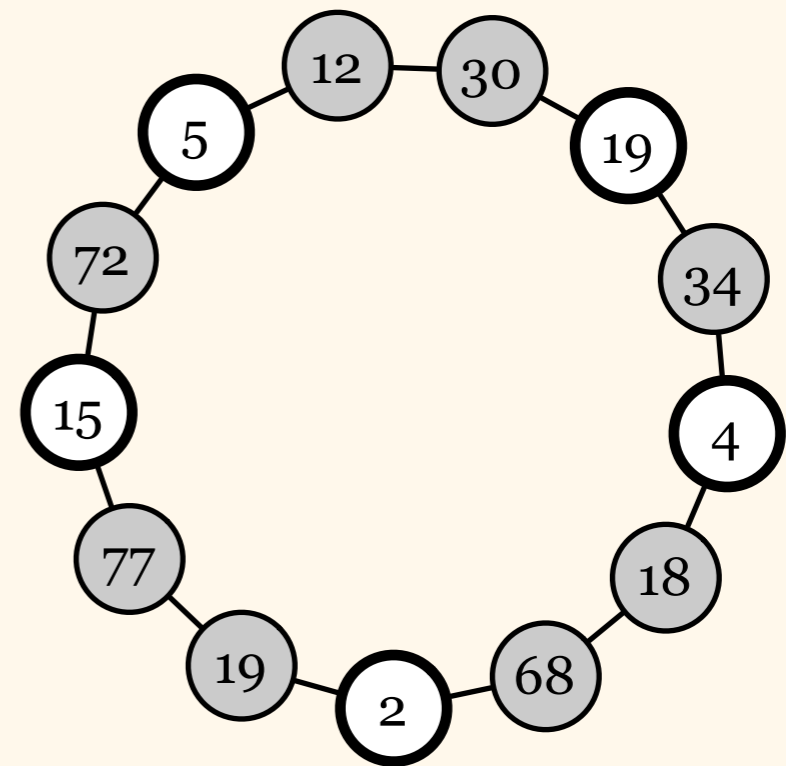
Solmujen nimet

- Oletetaan, että kullakin solmulla on *yksilöllinen tunniste*
 - esim. IP-osoite, MAC-osoite, koneen nimi...
- Tällöin värittäminen on helppo löytää ahneesti



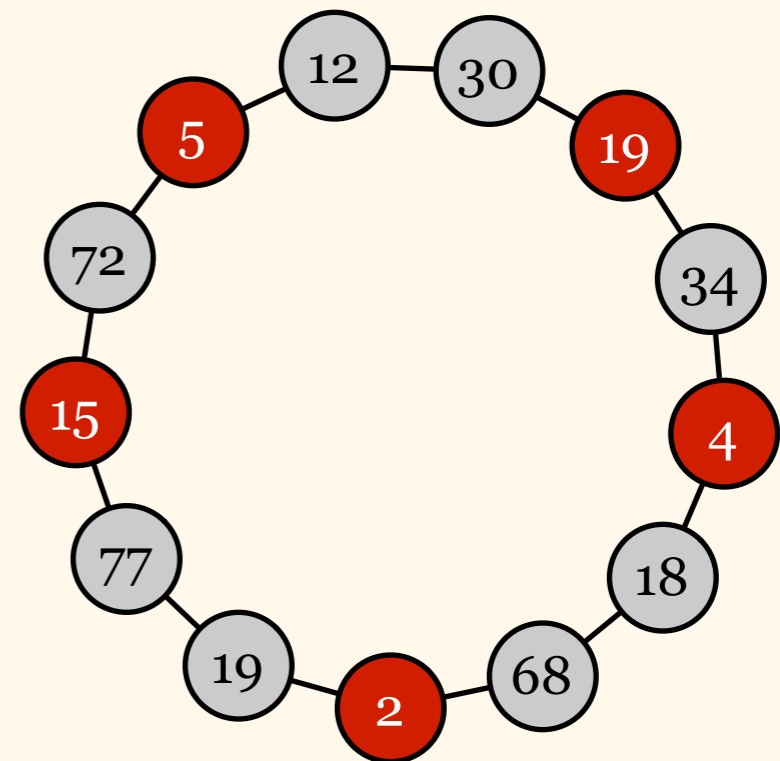
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla



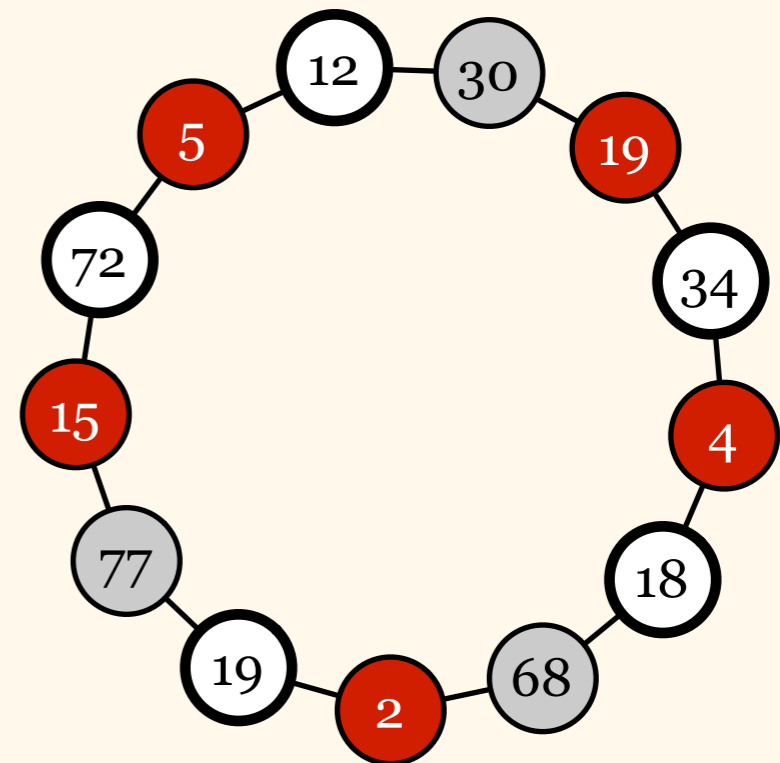
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla
- Aktiiviset solmut valitsevat ensimmäisen vapaan värin
 - voidaan tehdä samanaikaisesti rinnakkain



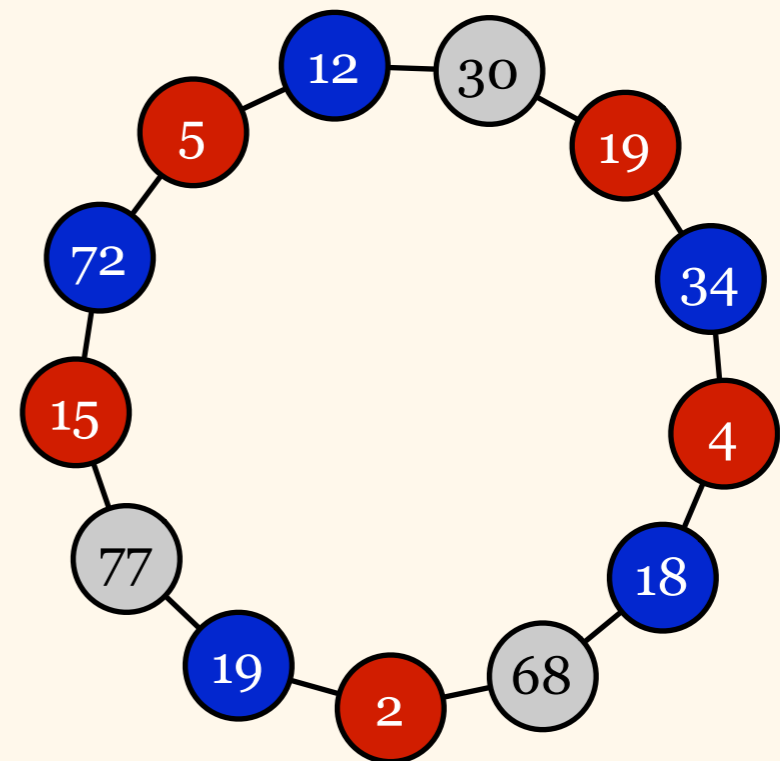
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla
 - unohdetaan naapurit, jotka on jo väritetty



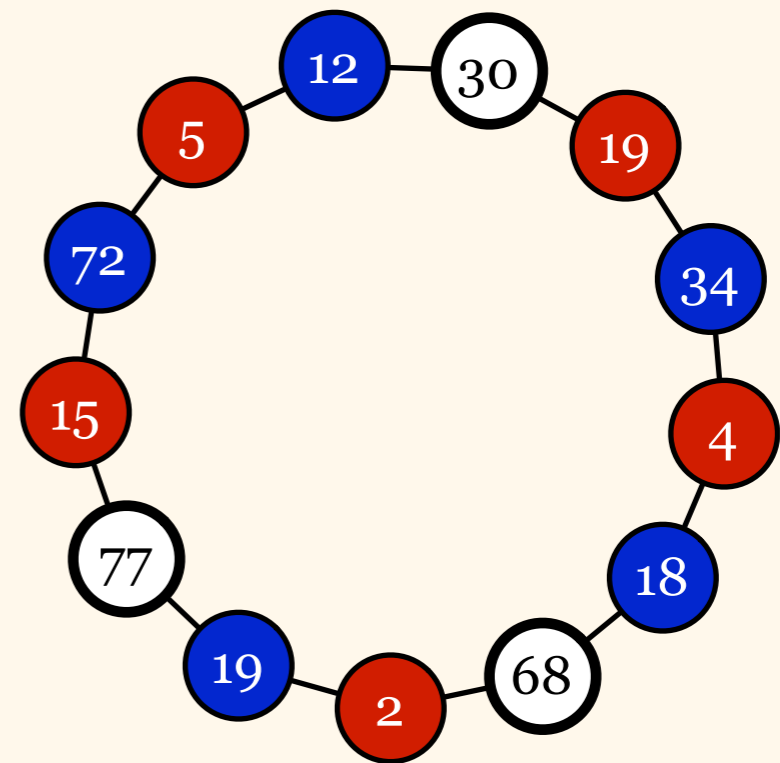
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla
- Aktiiviset solmut valitsevat ensimmäisen vapaan värin



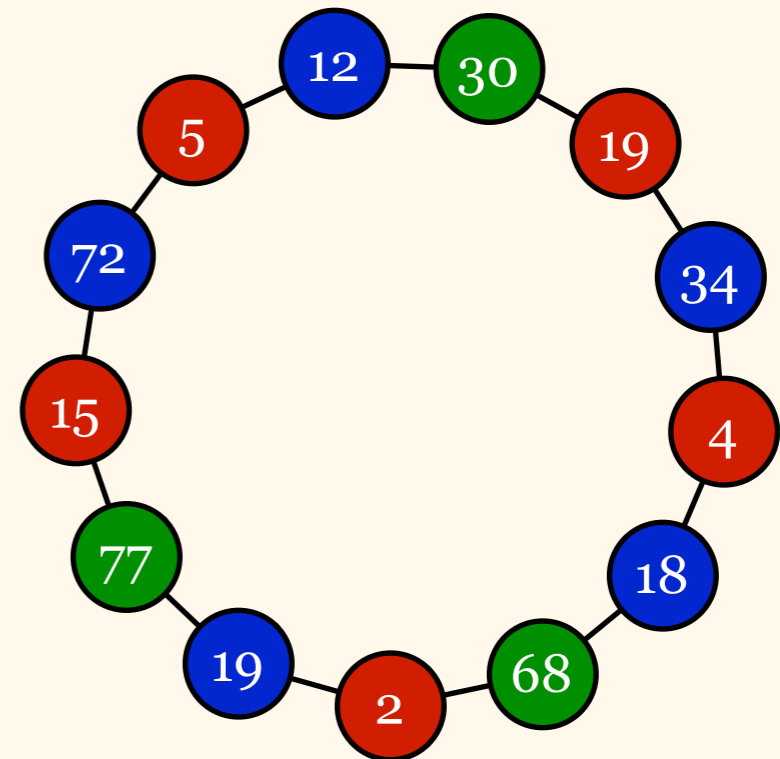
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla
 - unohdetaan naapurit, jotka on jo väritetty



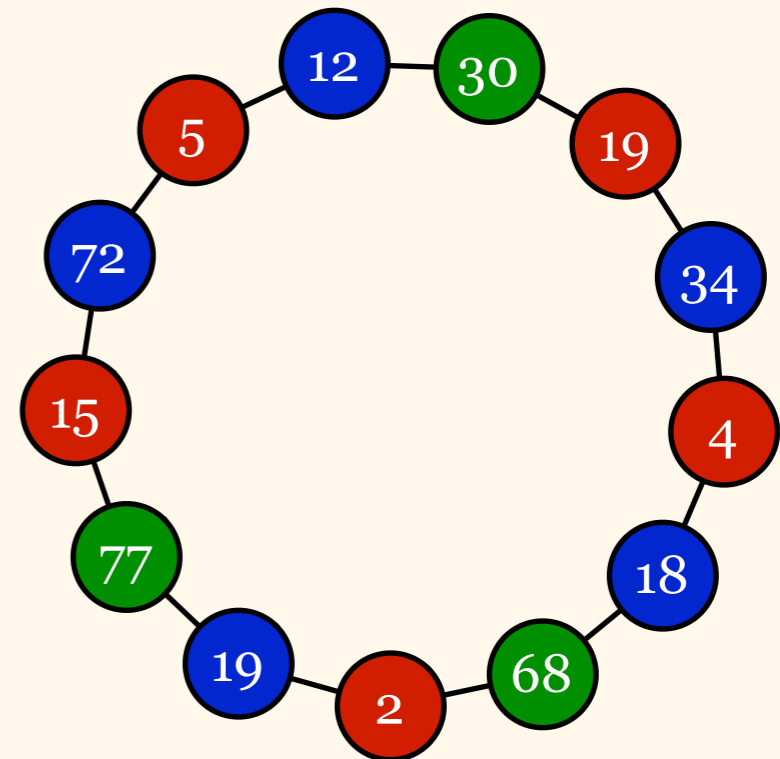
Ahne väritys

- Solmu aktiivinen, jos sen oma tunniste on pienempi kuin naapureilla
- Aktiiviset solmut valitsevat ensimmäisen vapaan värin



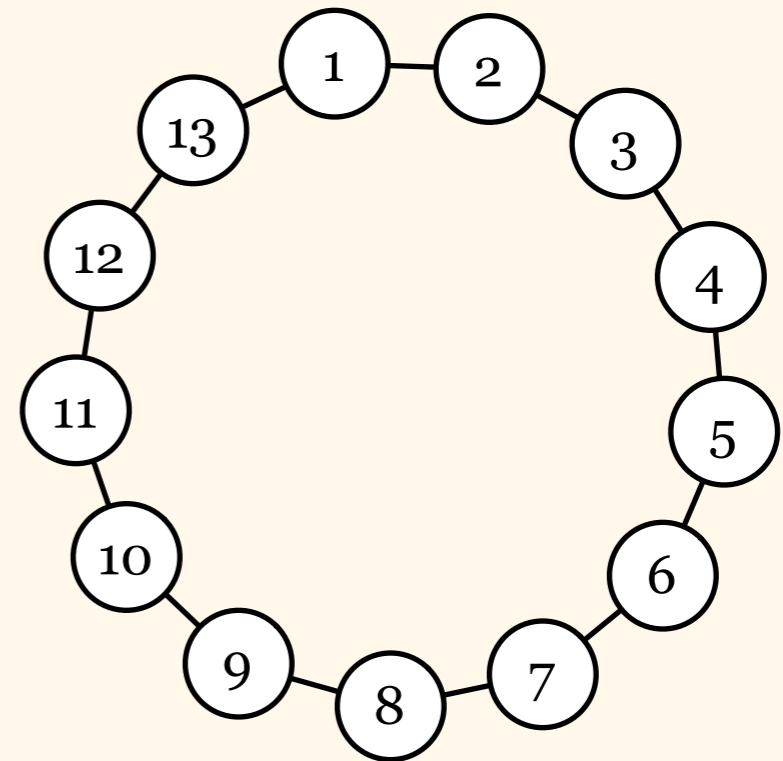
Ahne väritys

- Löydetään aina kelvollinen väritys
- Esim. syklissä tarvitaan vain 3 väriä
 - yleisemmin:
enintään $\Delta + 1$ väriä,
jossa $\Delta =$ verkon
maksimiasteluku



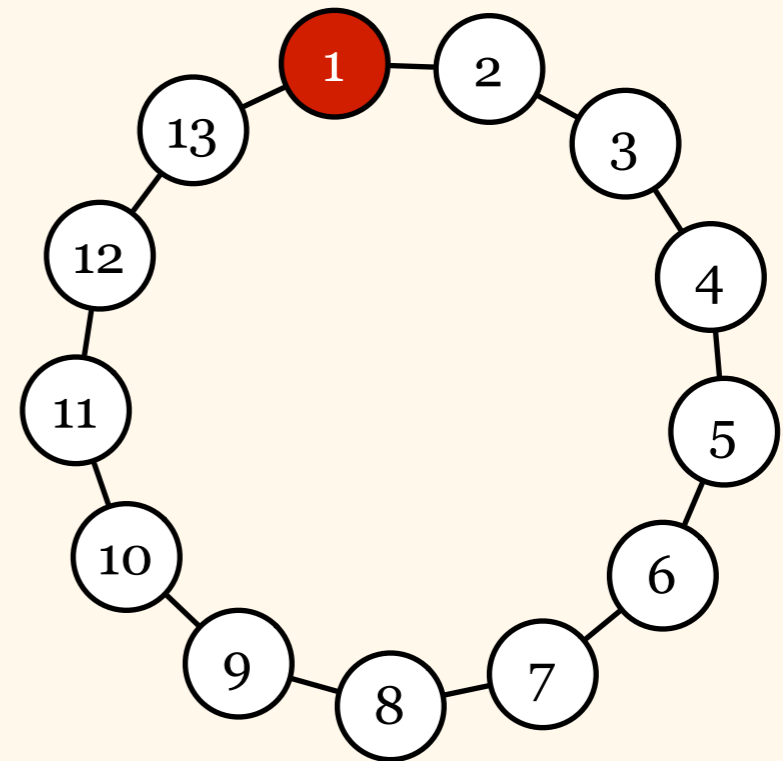
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä



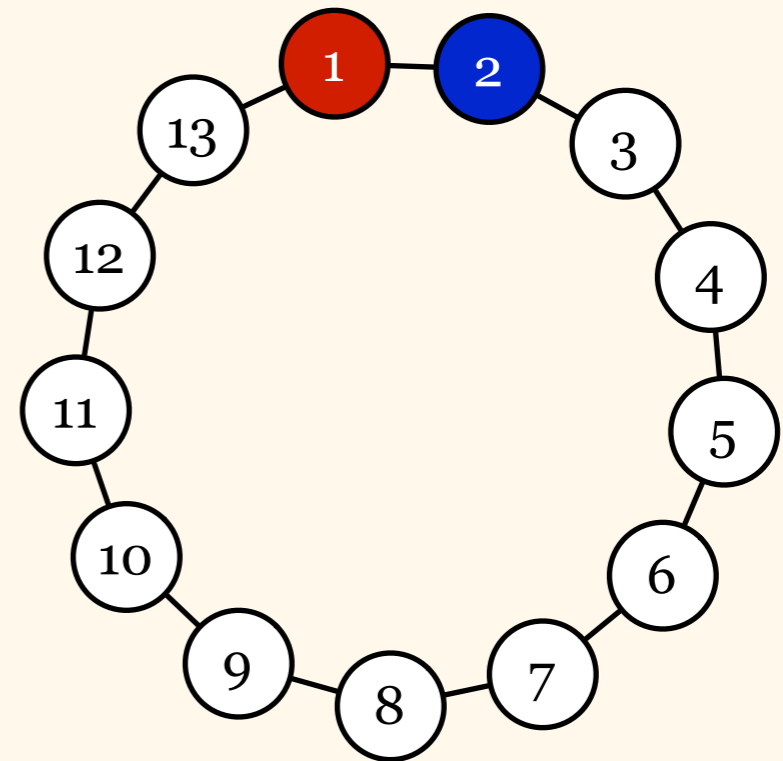
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä



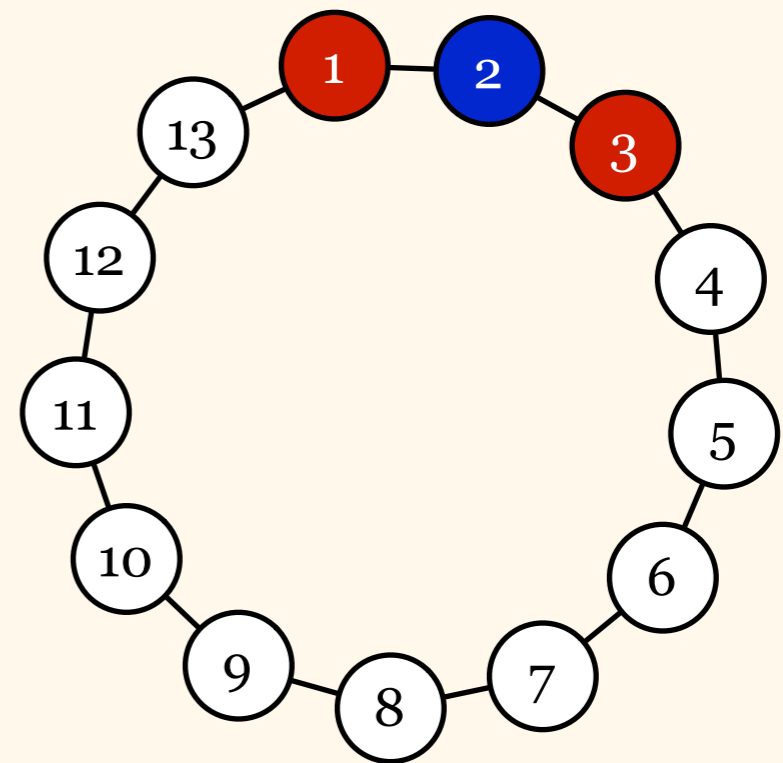
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä



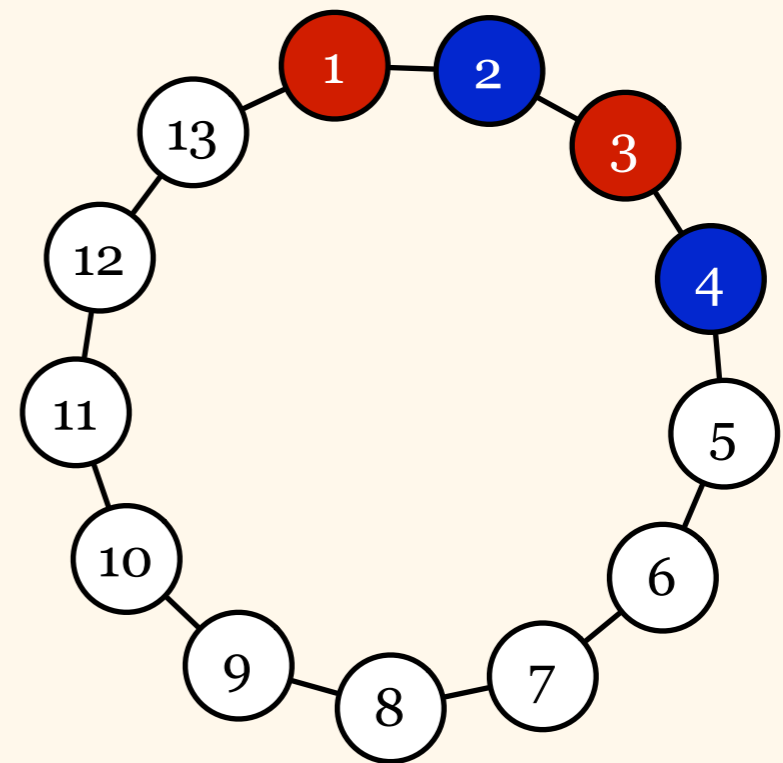
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä



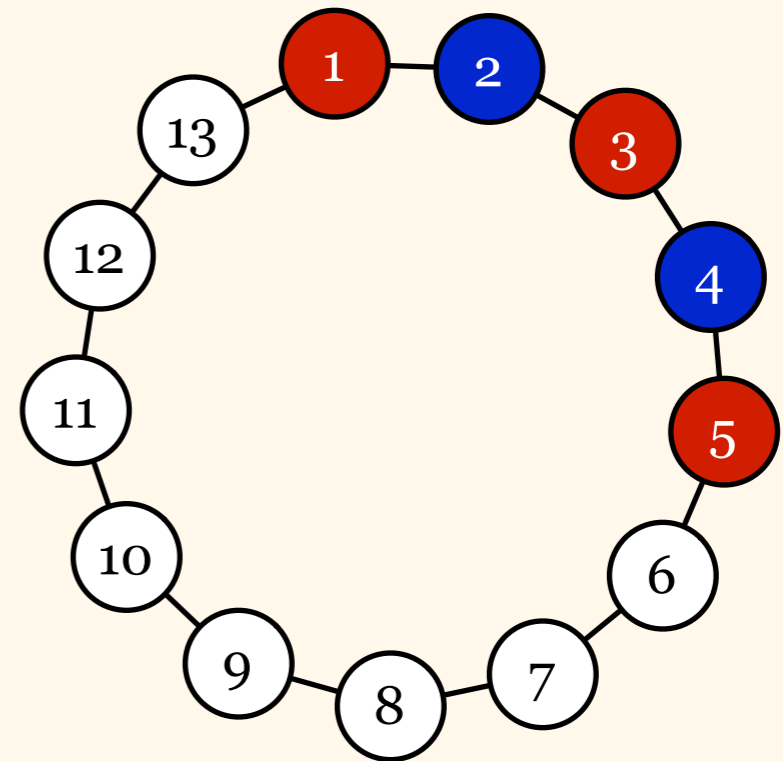
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä



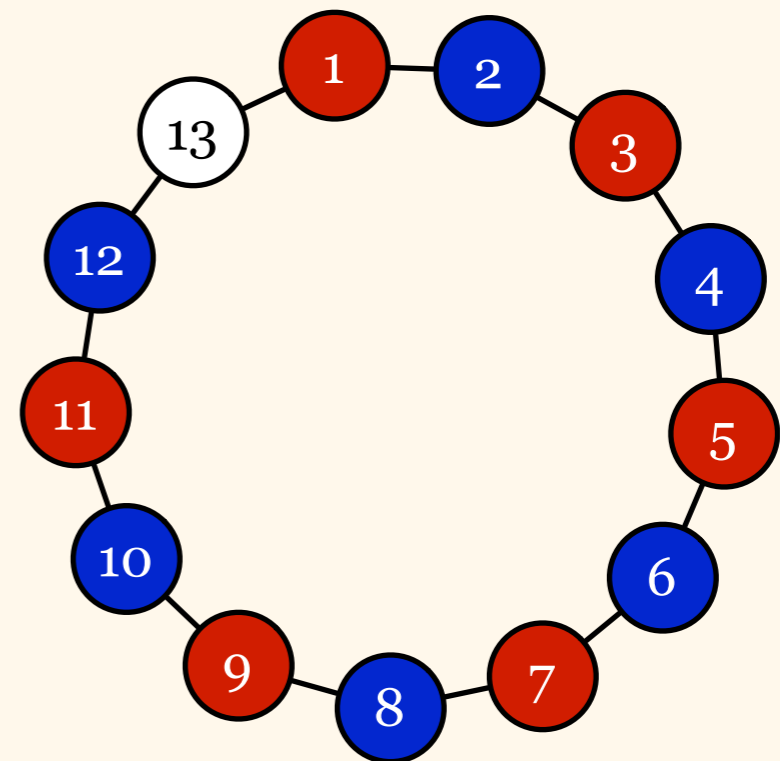
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä
 - jne...



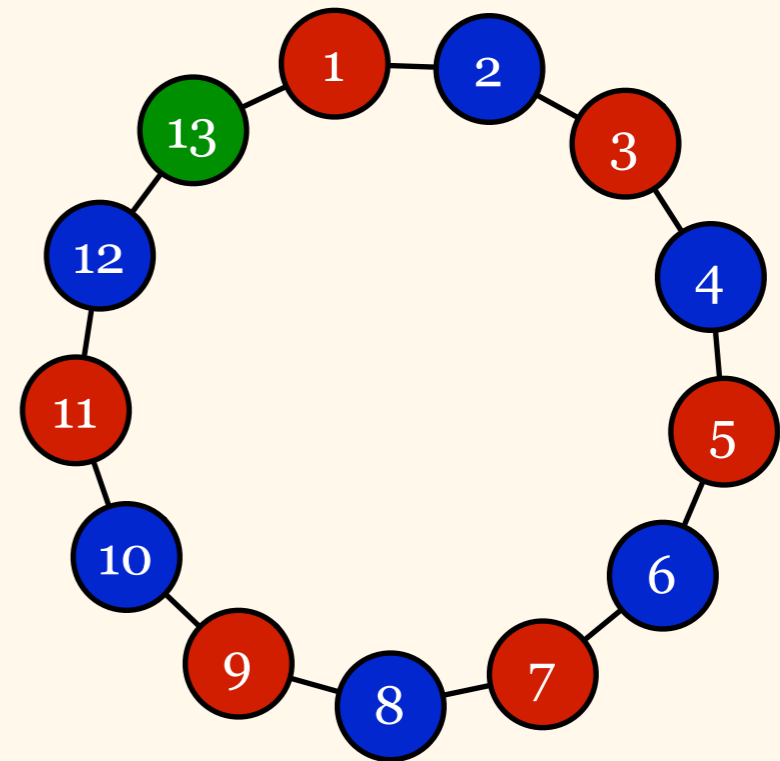
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä
 - jne... jne...



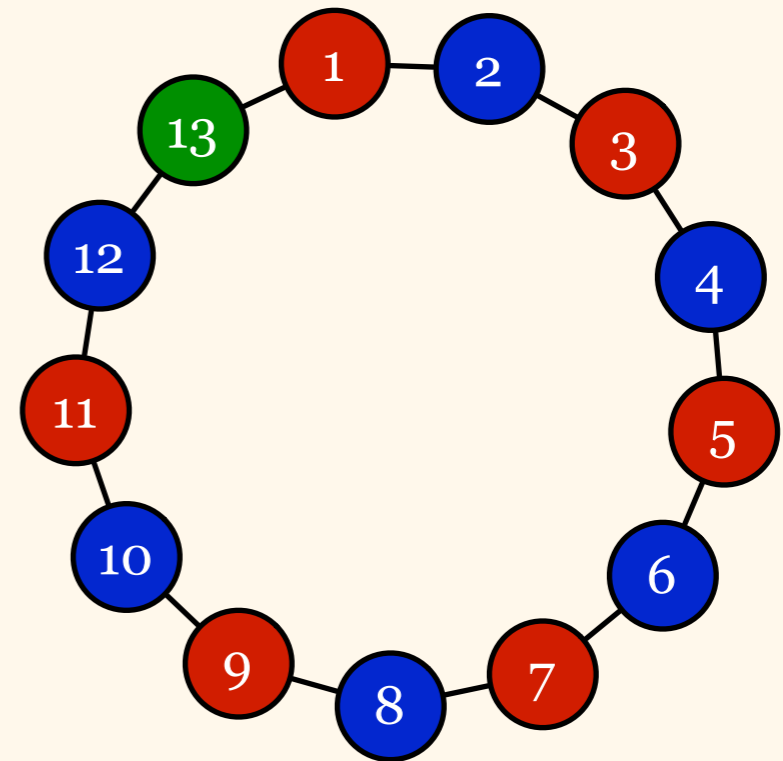
Ahne väritys

- Ahne algoritmi on kuitenkin pahimmassa tapauksessa hyvin hidas
 - esim. solmujen tunnisteet kasvavassa järjestyksessä pitkin sykliä
 - valmistuihan se lopulta



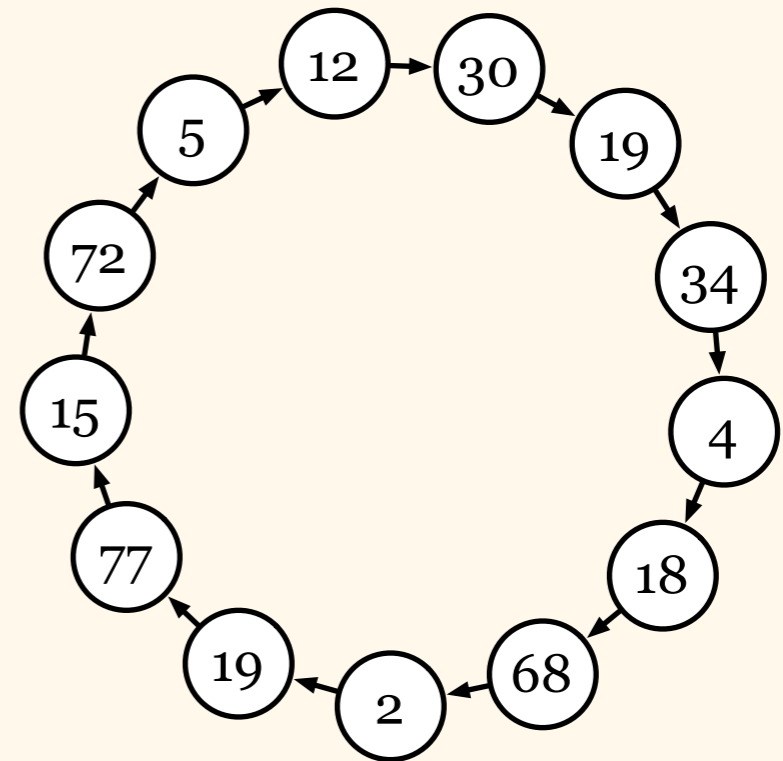
Ahne väritys

- Vaaditaan pahimmillaan $\Theta(n)$ kommunikaatiokierrosta n -solmuisessa verkossa
- Onko mahdollista nopeuttaa?



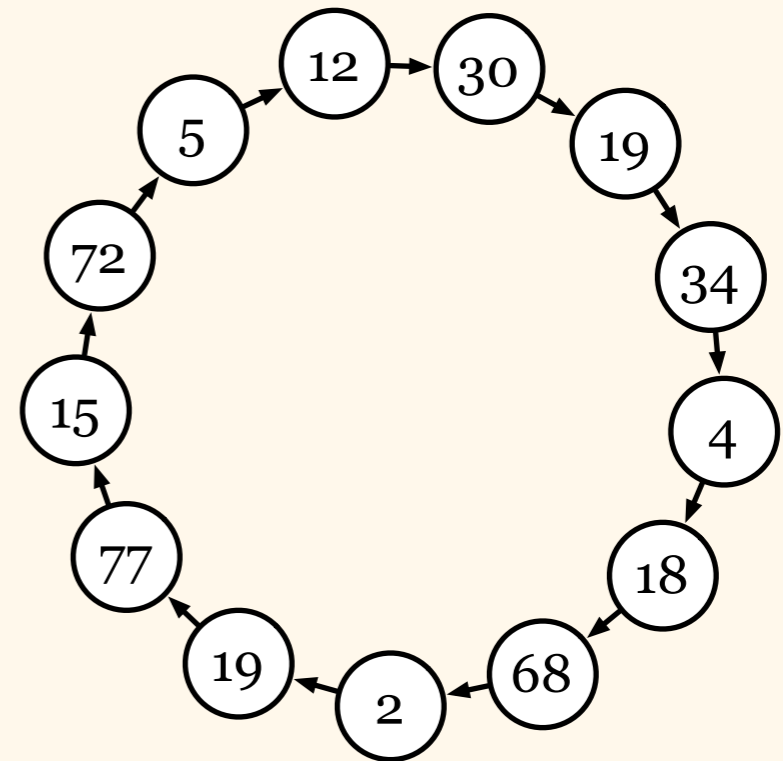
Nopea väritys

- Keskitytään yksinkertaiseen erikoistapaukseen
 - sykli
 - solmuilla uniikit nimet joukosta $\{1, 2, \dots, n\}$
 - kaaret suunnistettu: jokaisella solmulla yksi edeltäjä ja yksi seuraaja

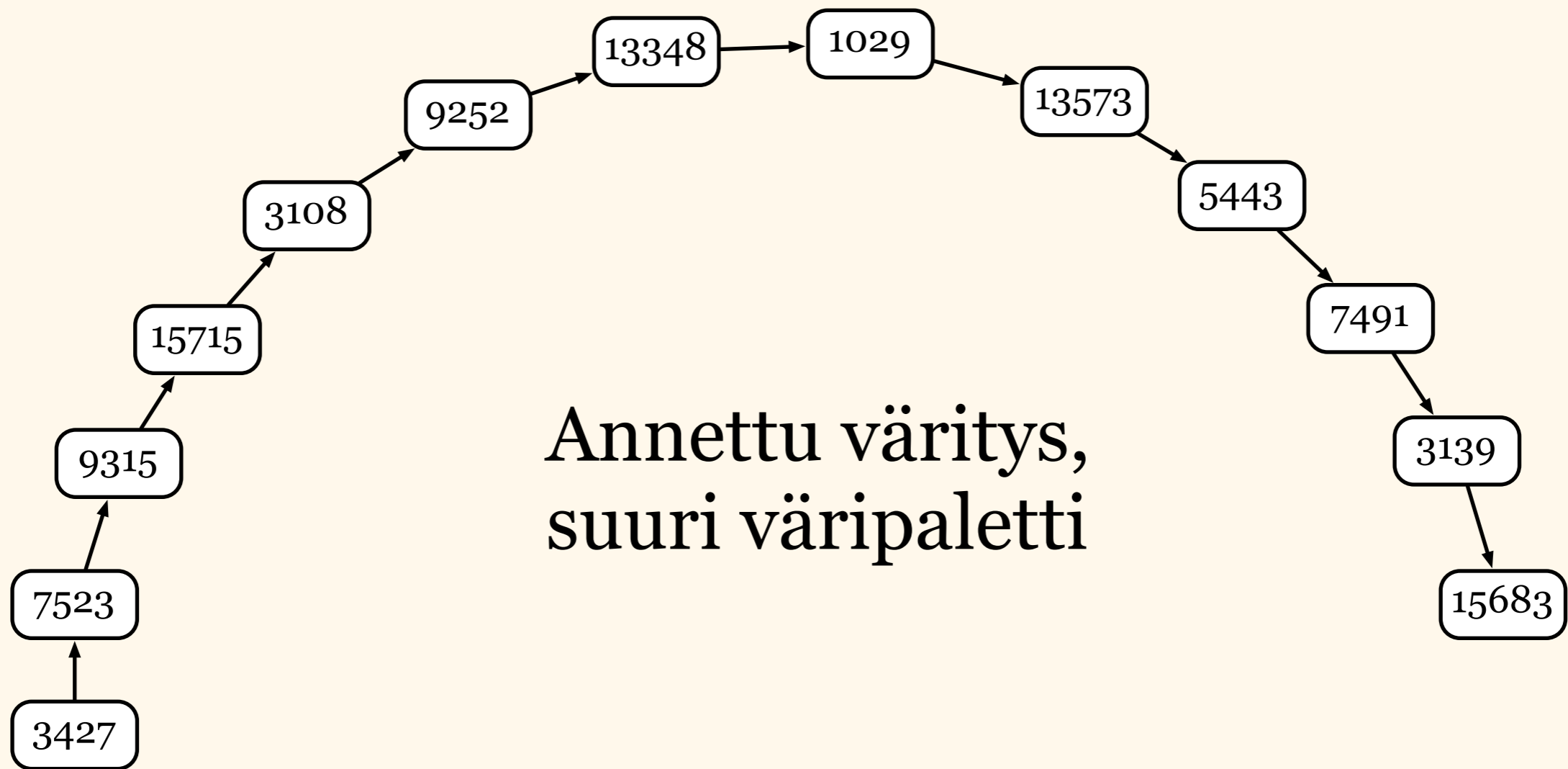


Nopea väritys

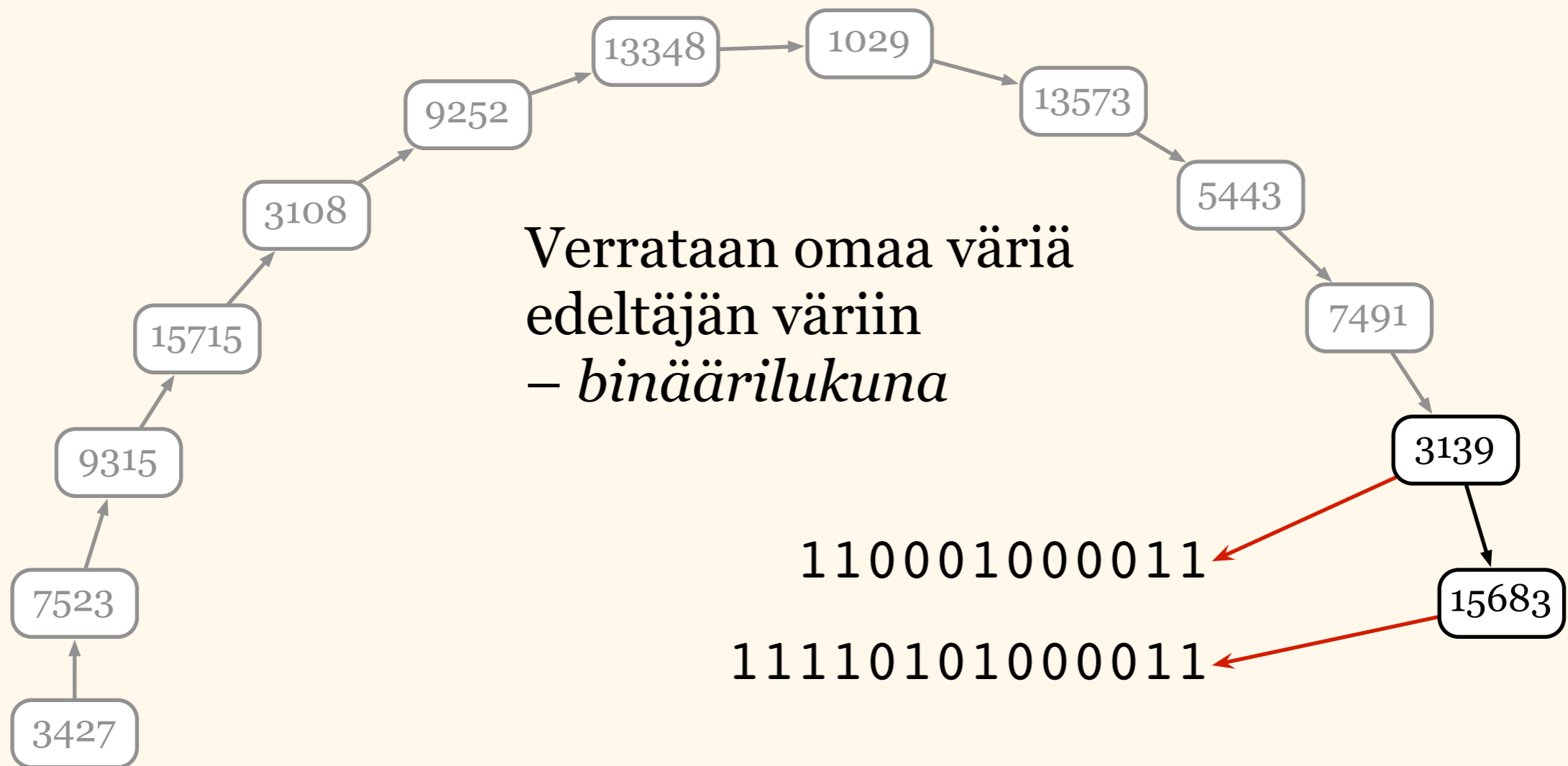
- Tulkitaan solmujen nimet värikykseyksi!
 - kelvollinen väritys mutta hyvin suuri määrä värejä
- Ratkaistaan sitten *värinvähennysongelma*
 - pienennetään värien määrää
- Toistetaan...



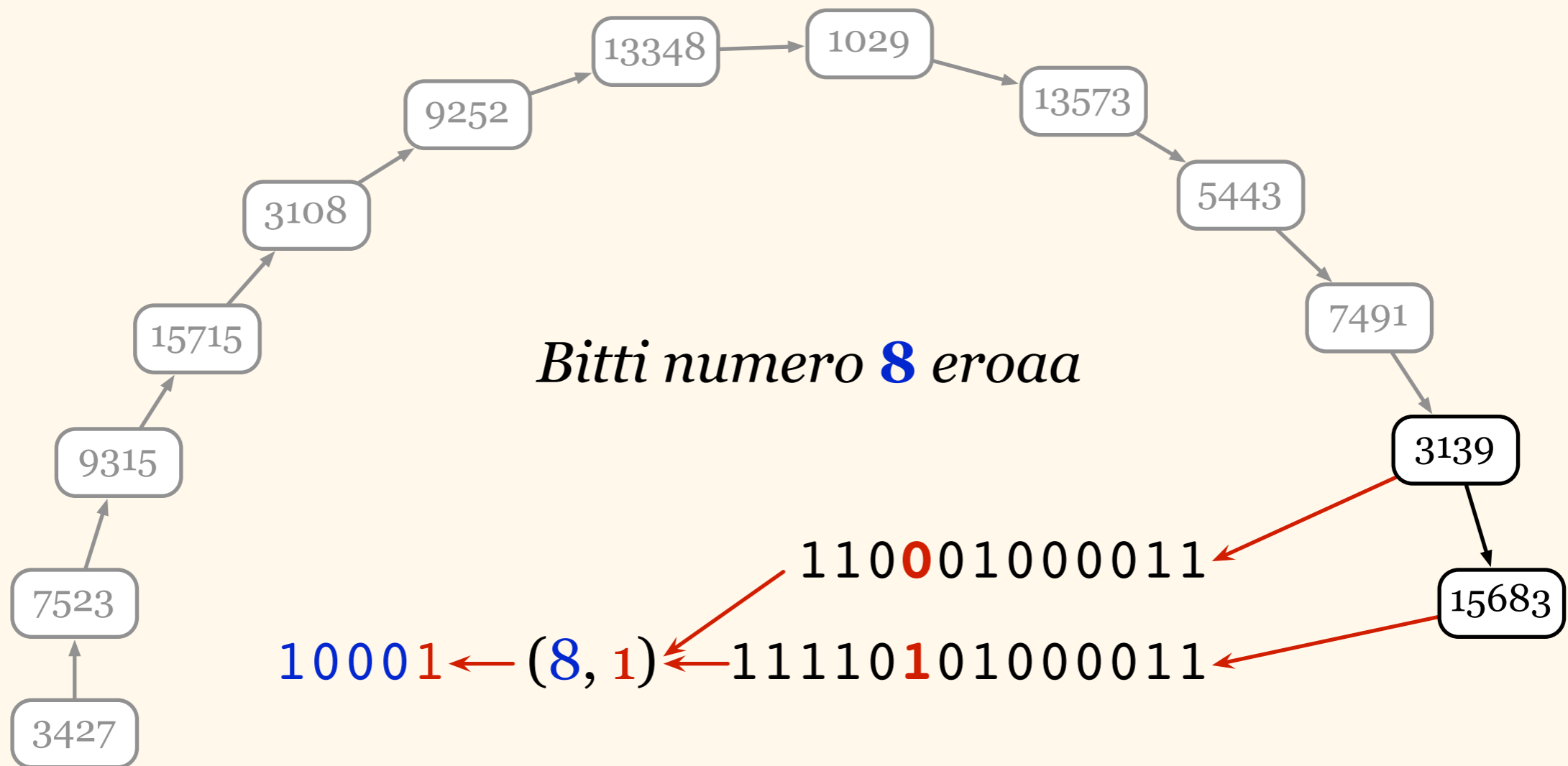
Väriinvähenys



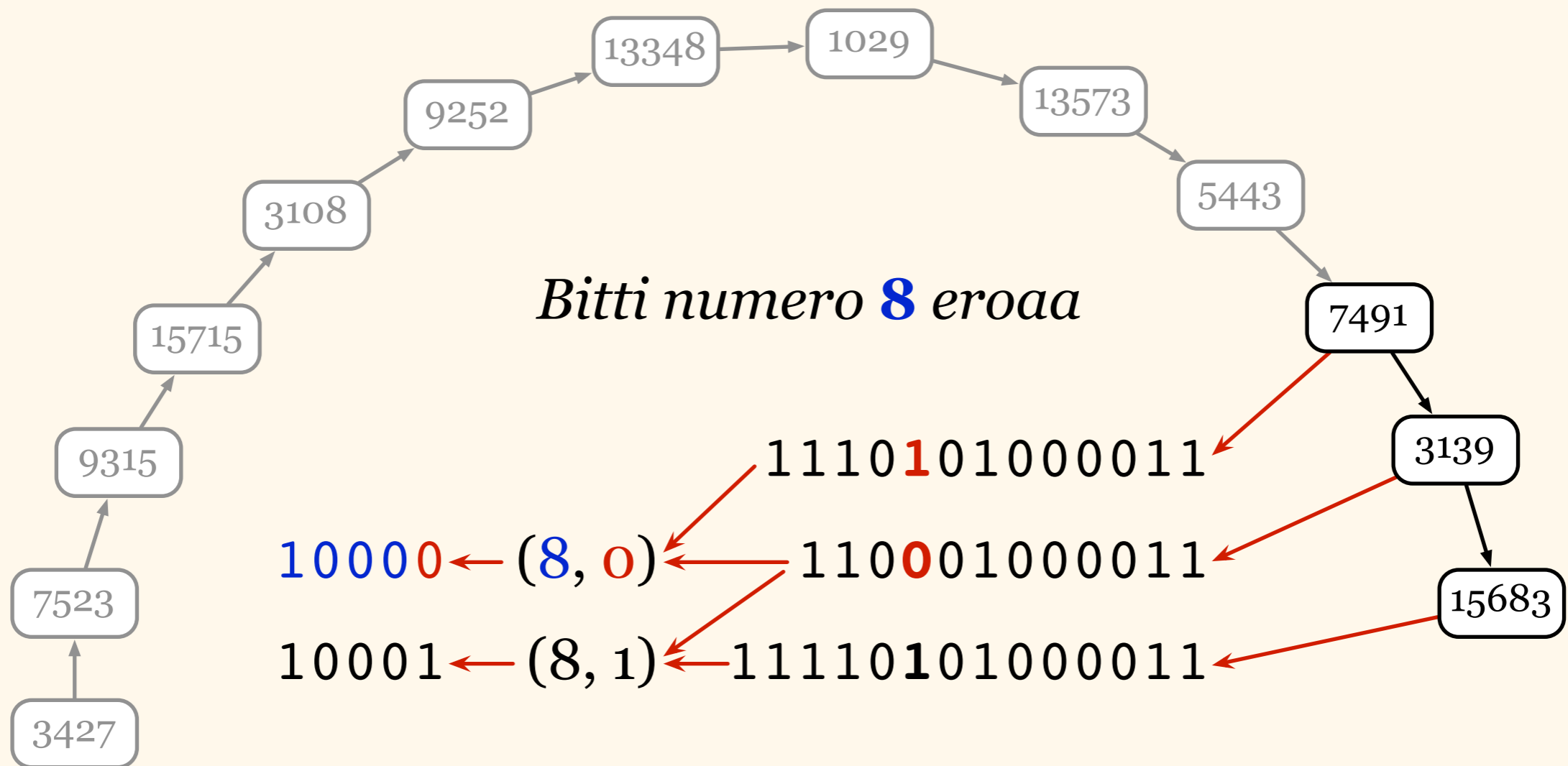
Värinvähennys



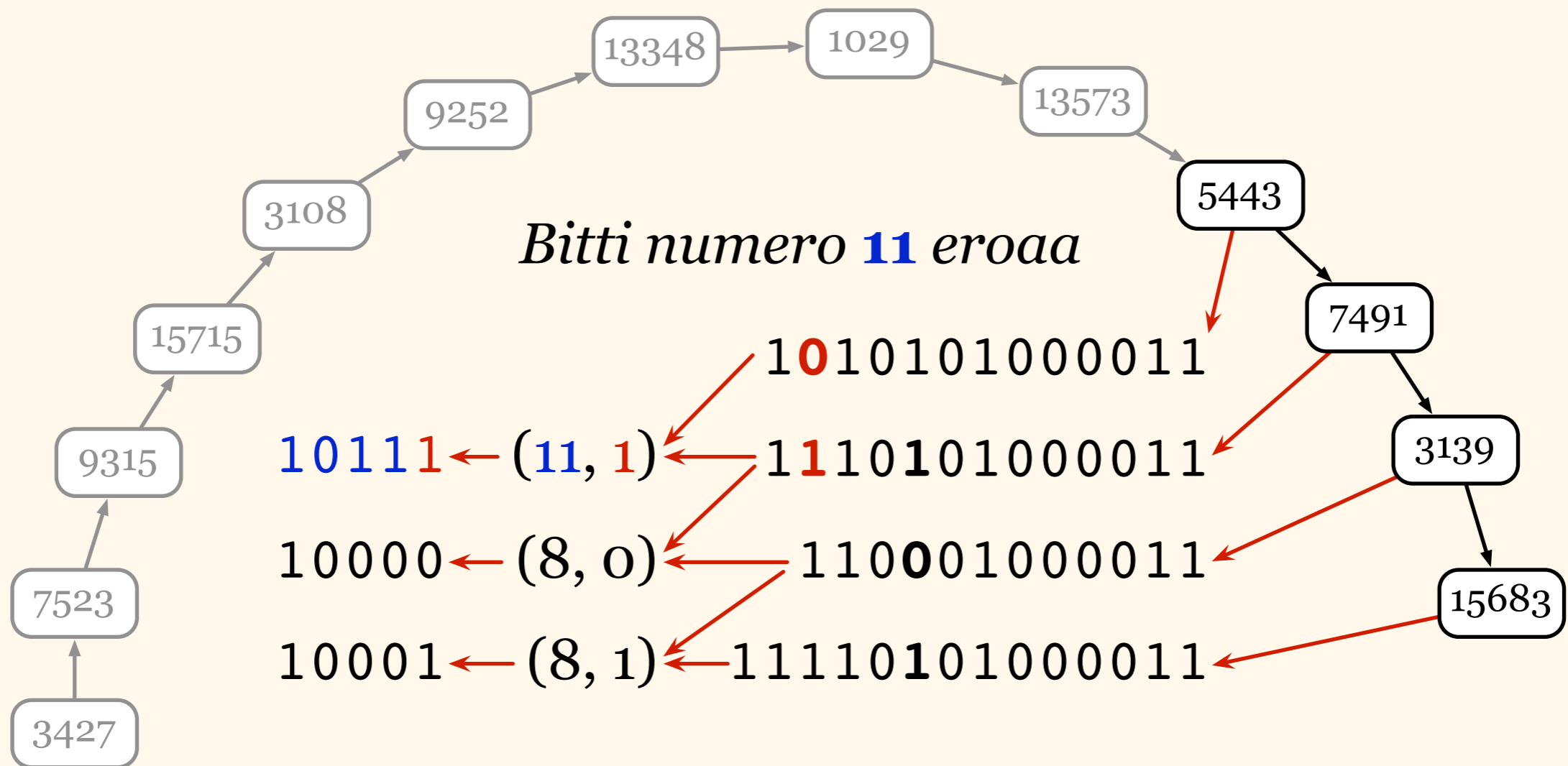
Värinvähennys



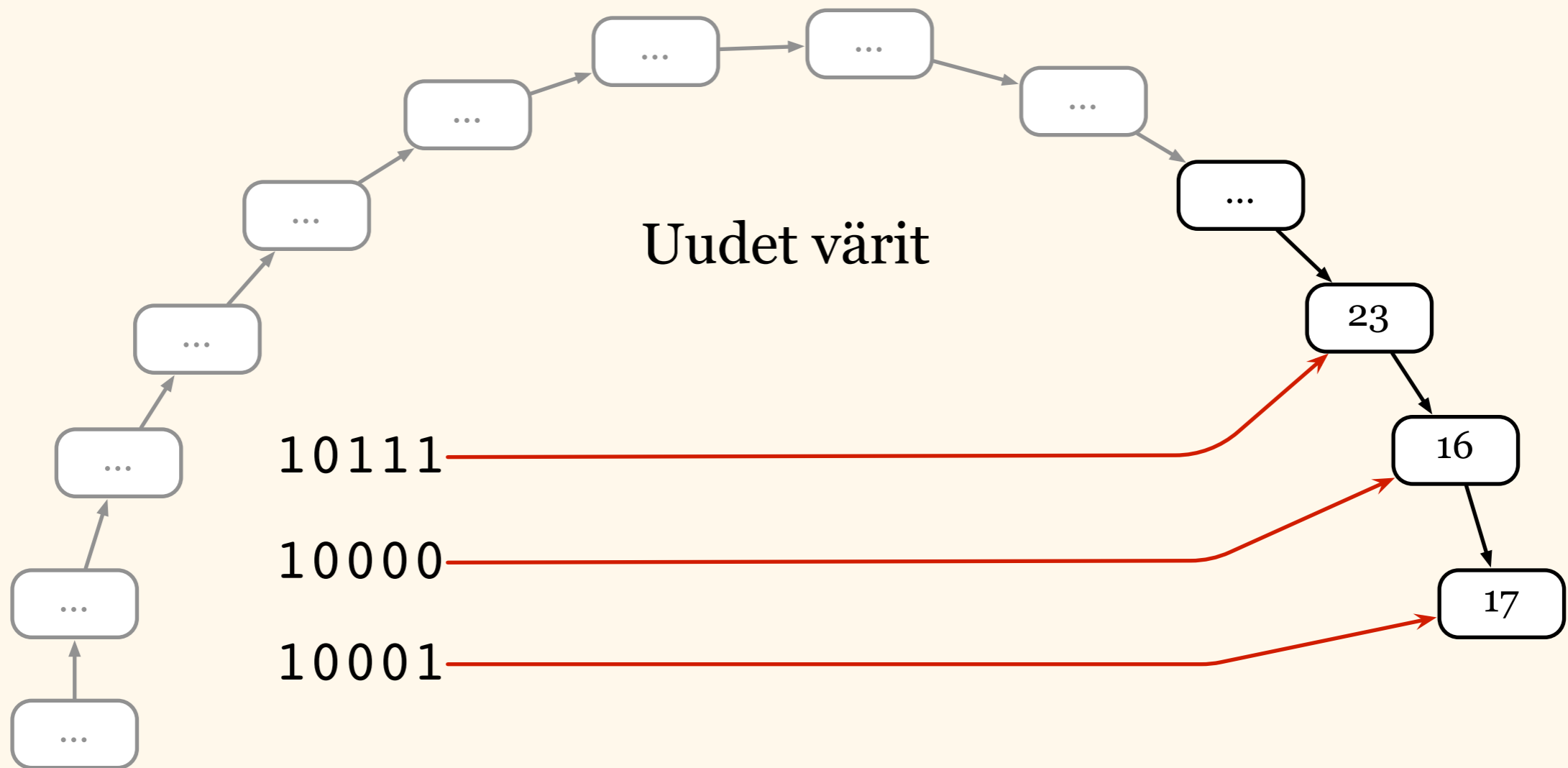
Värinvähennys



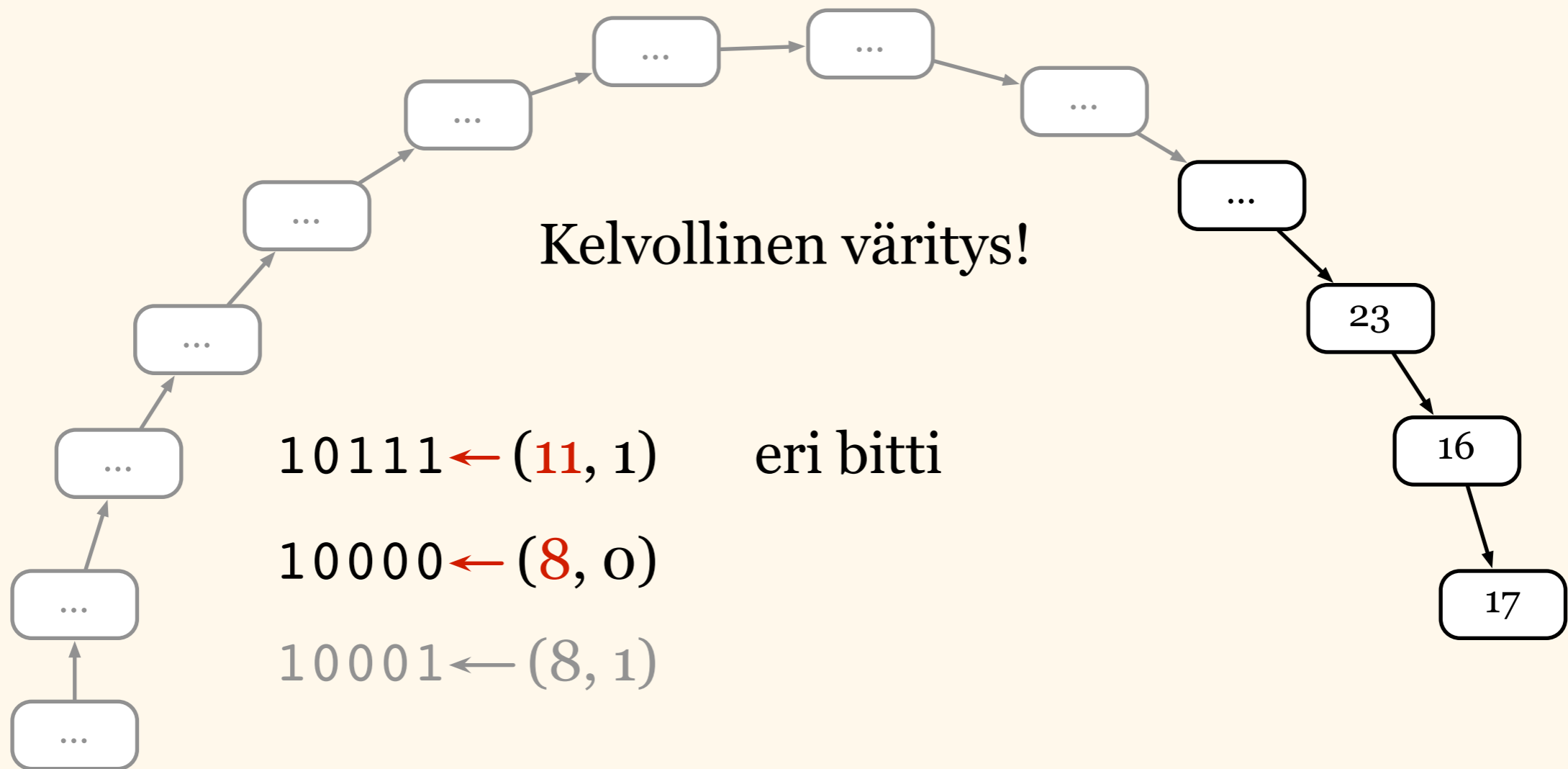
Värinvähennys



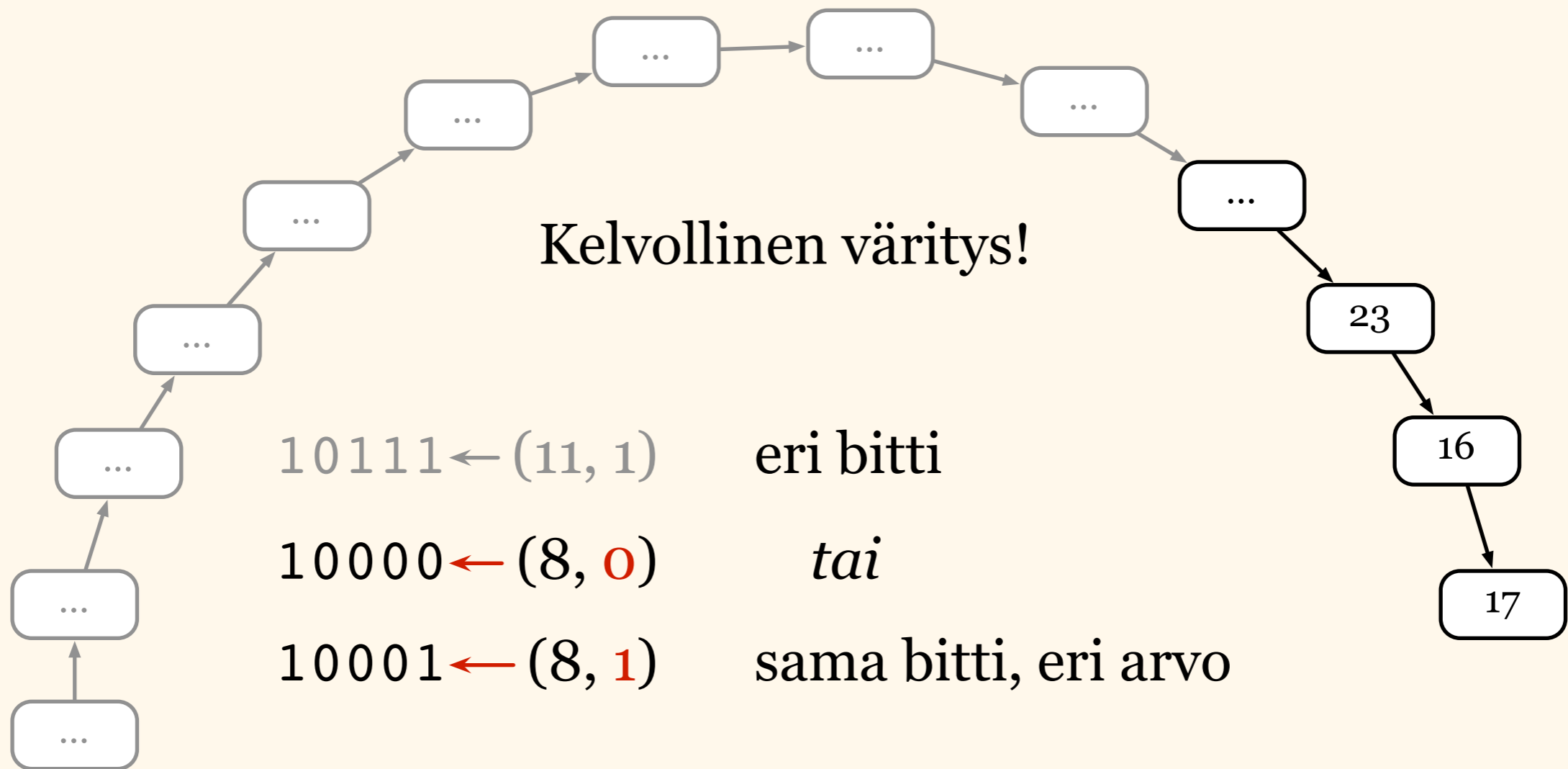
Väriin vähennys



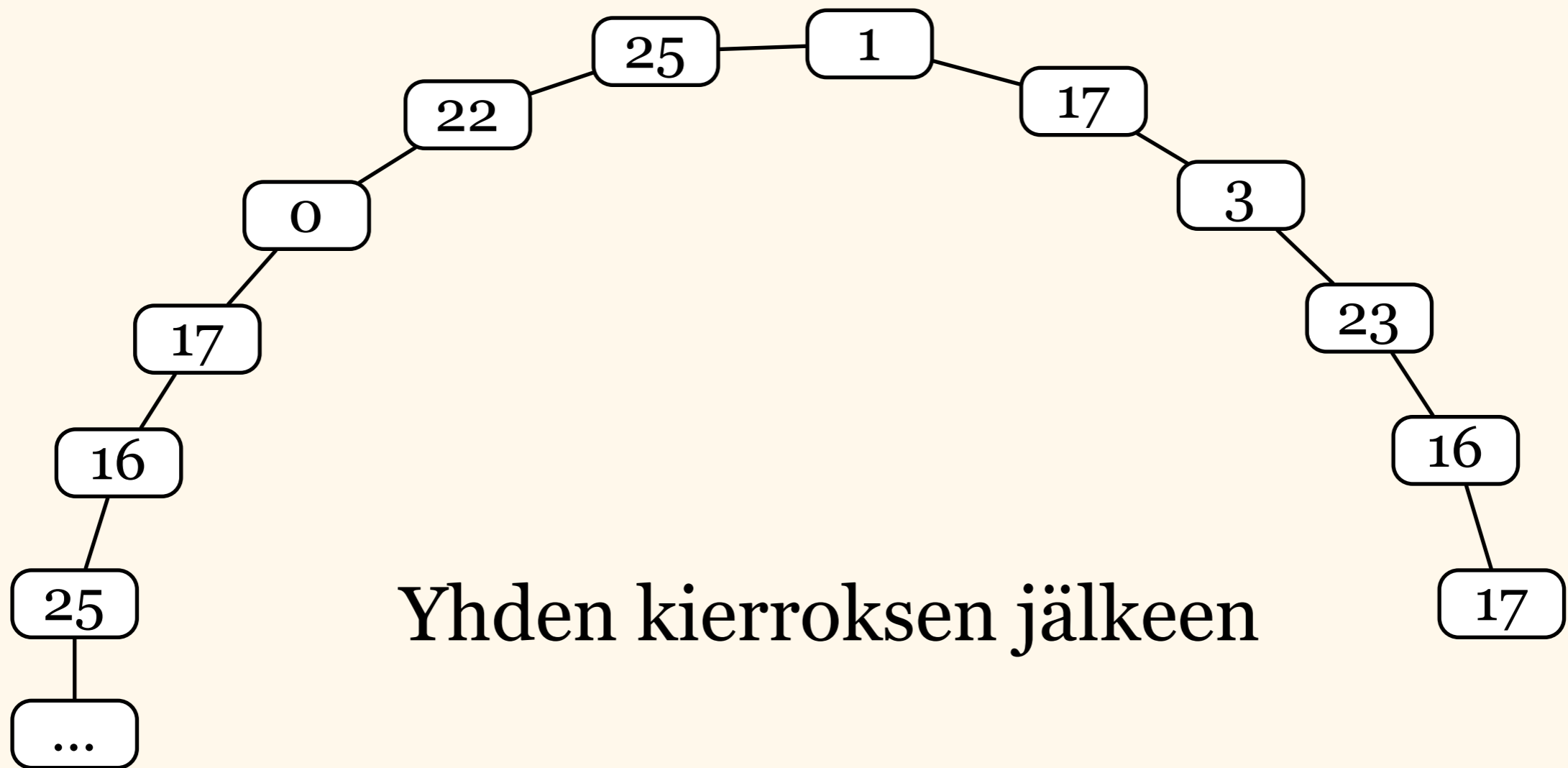
Väriinvähenys



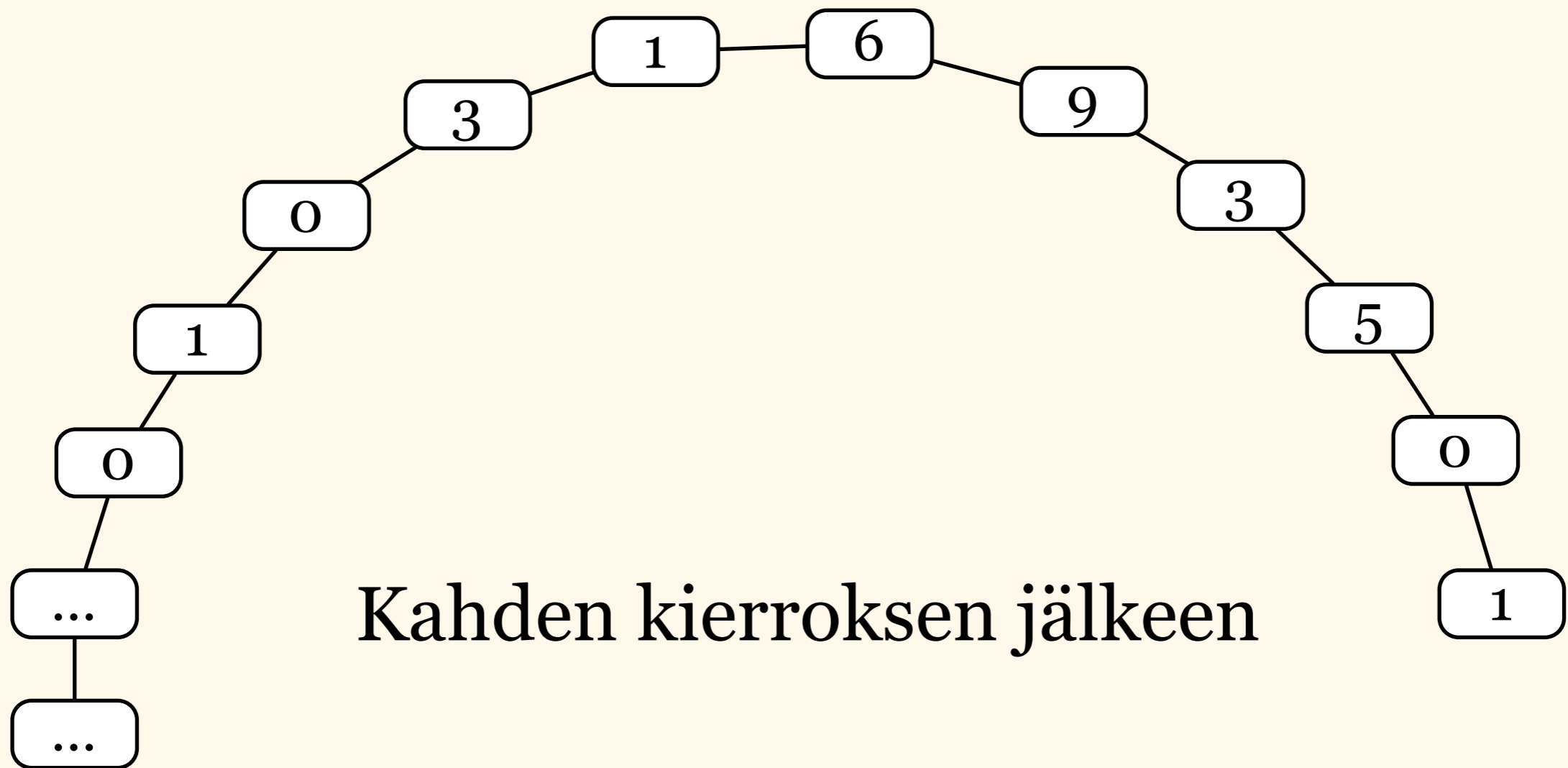
Väriin vähennys



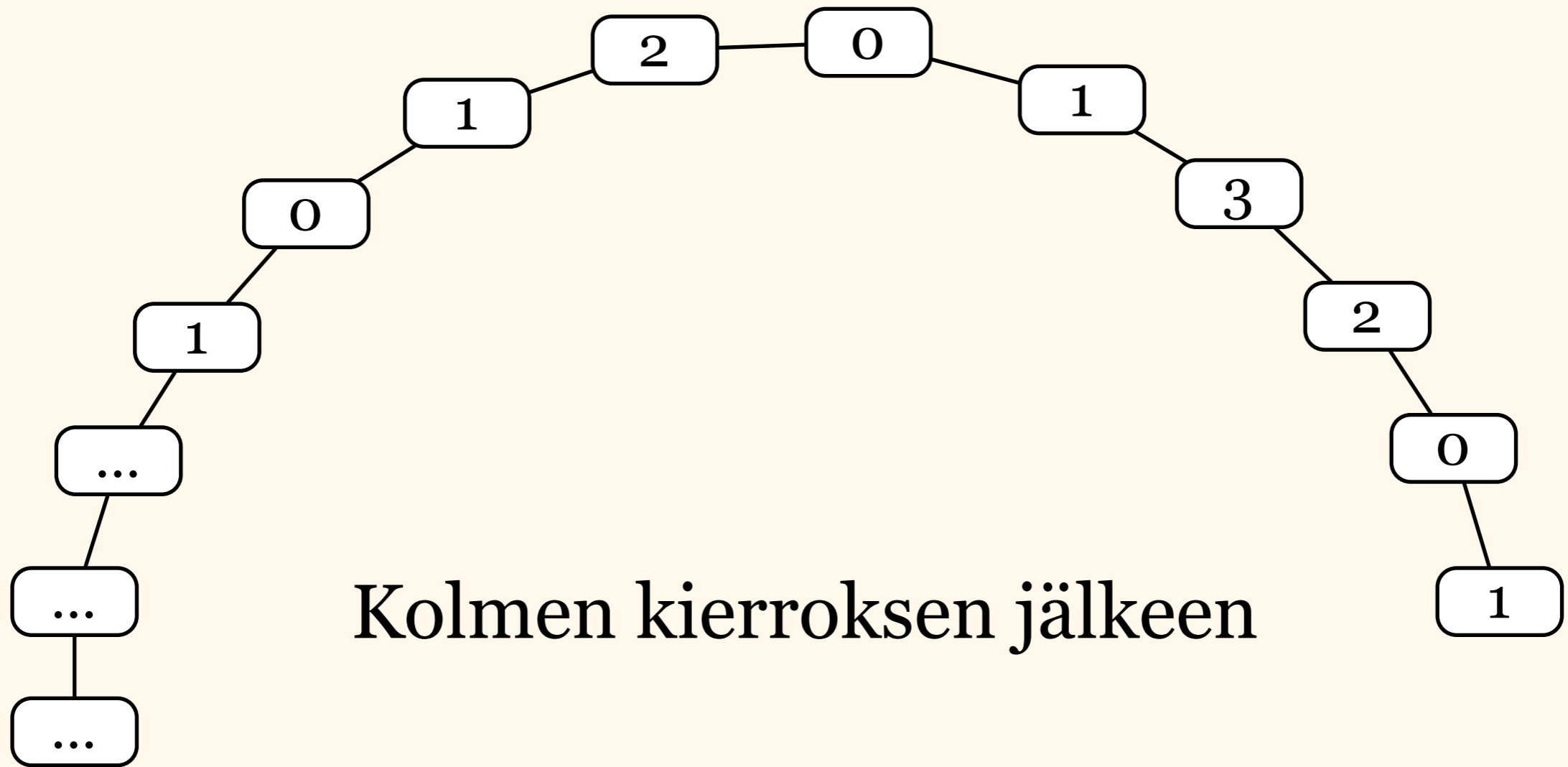
Väriinvähennys



Värinvähennys



Väriinvähenys



Väriinvähennys

- Väripaletin kokoa voidaan vähentää k väristä $O(\log k)$ väriin yhdessä kierroksessa
- Päästään hyvin nopeasti 6 väriin
- Esim.: $2^{128} \rightarrow 256 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 6$
- Lopuksi ahneella algoritmilla 3 väriin

Väriinvähennys

- Värien määrä vähennetty $n \rightarrow 3$
- Yhteensä $O(\log^* n)$ kierrosta
 - $\log^* x =$ montako kertaa pitää ottaa x :stä logaritmi, jotta tulos olisi alle 1
 - äärimmäisen hitaasti kasvava funktio!
 - $\log^* 10 = 3$, $\log^* 10000 = 4$, $\log^* 10^{10000} = 5$, ...

Yhteenveto

- Suunnatussa syklissä on mahdollista löytää 3-väritys erittäin nopeasti
 - $O(\log^* n)$ kommunikaatiokierrosta riittää
- Osoittautuu, että tämä algoritmi on myös asympotoottisesti nopein
 - $o(\log^* n)$ kommunikaatiokierrosta ei riitä
 - lisää tästä IV periodin kurssilla!